



УДК 521.313

В. Е. Чеботарев, В. И. Борисов

*Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск, Красноярский край, Россия*

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕХВАТА РАКЕТОЙ АСТЕРОИДА, ОПАСНОГО ДЛЯ ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ

Работа посвящена разработке программы движения ракеты на перехват астероида. Представлены алгоритмы расчета параметров встречи астероида с Землей, построения траекторий движения ракеты, Земли и астероида в единой временной шкале, связанной с временем движения ракеты.

Ключевые слова: планета Земля, астероид, ракета, параметры орбиты, точка перехвата, траектория полета, длительность полета, эксцентриситет, эклиптика, уравнение Кеплера.

V. E. Chebotarev, V. I. Borisov

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

CALCULATION ALGORITHM DEVELOPMENT OF CATCHING DANGEROUS FOR EARTH ASTEROID BY ROCKET

This article is introducing software – calculation algorithm of catching dangerous for Earth asteroid by rocket. Article provides algorithms calculation parameters of crossing asteroid with Earth, estimation of rocket's trajectory, Earth in union time scale based on rocket moving time.

Key words: Earth, asteroid, rocket, orbit's parameters, cross point, catch point, flying trajectory, flying duration, Eccentricity, the Ecliptic, the Kepler equation.

В прошлом Земли имеется достаточное число примеров встречи с астероидами (или кометами). Падение такого космического тела в населенные места, где есть экологически опасные производства, может вызвать катастрофу.

Предотвратить опасное столкновение в настоящее время возможно путем изменения траектории движения астероида или его разрушения с помощью ракеты, запускаемой с Земли с упреждением по времени.

Алгоритм расчета параметров встречи астероида с Землей

1. Параметры орбиты астероида, который может столкнуться с Землей, определяют из наблюдений на обсерваториях за несколько лет до этого момента.

Рассмотрим частный случай, когда орбита астероида находится в плоскости эклиптики и астероид движется навстречу Земле (тогда максимальная скорость встречи и максимальный ущерб Земле). Для проведения расчетов будем считать орбиту Земли круго-

вой, а астероида эллиптической, описываемой двумя параметрами: большой полуосью a и эксцентриситетом e . При выборе расчетных значений эксцентриситета орбиты астероида e накладывается ограничение (исходя из условия пересечения астероидом орбиты Земли): $e \geq 1 - \frac{r_3}{a}$, где r_3 – радиус орбиты Земли, $r_3 = 150$ млн км или 1 а.е. (астрономическая единица). Для удобства расчетов большую полуось орбиты астероида a будем задавать также в астрономических единицах. На рис. 1 приведена орбита астероида со следующими параметрами: $a = 3,375$ а.е., $e = 0,856$, которое удовлетворяет ограничению $e \geq 1 - \frac{r_3}{a} = 0,703$.

При заданном значении большой полуоси a вычисляется период обращения астероида

$$T_a = T_3 \left(\frac{a}{r_3} \right)^{1,5}, \quad (1)$$

где T_3 – длительность тропического года Земли, $T_3 = 365,25$ солнечных суток. Для $a = 3,375$ а.е., $T_a = 2264,6$ сут.

2. Параметры орбиты астероида на прогнозируемый момент столкновения его с Землей (рис. 1) определяются из равенства радиуса орбиты астероида r_a радиусу орбиты Земли r_3

$$r_a = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi_0} = r_3,$$

после преобразования получим

$$\frac{a}{r_3} (1 - e^2) = 1 + e \cos \varphi_0.$$

Из вышеприведенного равенства находим положение астероида относительно перигелия орбиты по истинной аномалии (угол φ_0):

$$\cos \kappa_0 = \frac{1}{e} \left[\frac{a}{r_3} (1 - e^2) - 1 \right] = A_0,$$

$$\varphi_0 = \arccos [A_0] - \text{в градусах.} \quad (2)$$

На основании уравнений Кеплера для эллиптического движения небесных тел вычисляем на момент прогнозируемого столкновения (рис. 1):

- эксцентрическую аномалию (угол E_0)

$$\operatorname{tg} \left(\frac{E_0}{2} \right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) = B_0,$$

$$E_0 = 2 \arctg [B_0] - \text{в градусах,} \quad (3)$$

- среднюю аномалию (угол M_0)

$$M_0 = E_0 - K_1 \cdot e \cdot \sin E_0 - \text{в градусах,} \quad (4)$$

$$K_1 = 57,32^\circ.$$

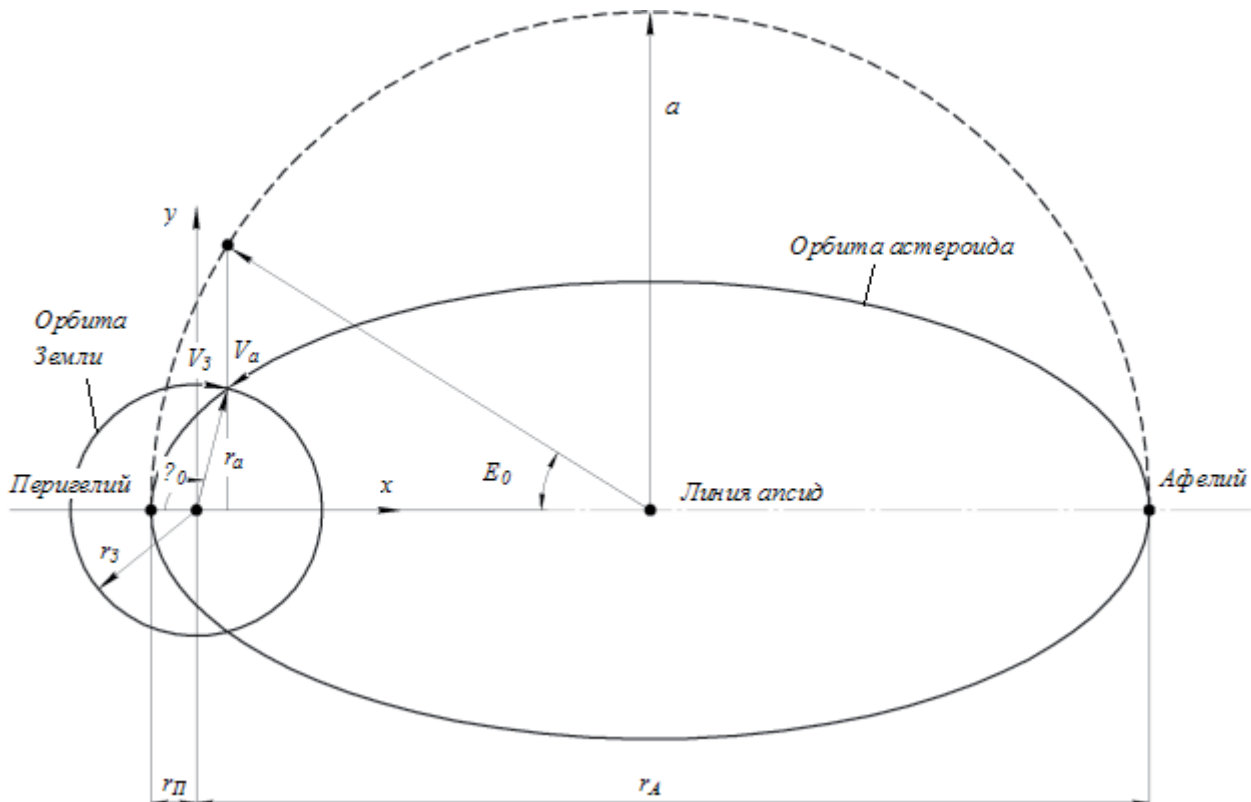


Рис. 1. Параметры орбиты астероида

Подставляя $a=3,375$ а.е. и $e=0,856$ в формулы (2–4), получим: $\varphi_0 = 96,56^\circ$, $E_0 = 34,7^\circ$, $M_0 = 6,77^\circ$.

3. Чтобы перехватить астероид ракетой, необходимо стартовать заранее, более чем за один год от расчетного момента столкновения астероида с Землей.

Примем условие, что на момент старта Земля находится на линии апсид в перигелии орбиты ракеты (в этом случае оптимизируются затраты импульса ракеты на ее разгон, так как приращение скорости ракеты складывается со скоростью движения Земли).

Проведем возврат Земли и астероида в прошлое (ретродвижение) на интервал времени (более чем за один год):

$$t_{CT} = T_3 + \frac{\varphi_0}{\omega_3} \quad (5)$$

в котором Земля находится на линии апсид, а астероид в точке, для которой средняя аномалия орбиты астероида:

$$M_{CT} = M_0 + \frac{t_{CT}}{T_a} \cdot 360^\circ, \quad (6)$$

$\omega_3 = 0,9856$ град/сут. – угловая скорость движения Земли по своей орбите. Для полученных выше значений: $\varphi_0 = 96,56^\circ$ и $M_0 = 6,77^\circ$ вычислим: $t_{CT} = 463,22$ сут., $M_{CT} = 80,407^\circ$. Если отодвинуть назад еще на один год, то получим еще одну точку старта: $t_{CT} = 828,47$ сут., $M_{CT} = 138,47^\circ$

Ретродвижение астероида организуем в виде циклического возрастания его истинной аномалии (угол φ_a) с шагом $\Delta\varphi$ [в градусах]

$$\varphi_a = \varphi_0 + \varphi_{01} + n \cdot \Delta\varphi < 180^\circ, n = 1, 2; \quad (7)$$

на первом этапе расчета принимаем $\varphi_{01} = 0$, на втором этапе приравнивается $\varphi_a^{n-1} = \varphi_{01}$.

Для каждого шага проведем расчет параметров движения астероида.

Текущий радиус орбиты астероида

$$r_a = a \frac{1-e^2}{1+e \cdot \cos \varphi_a}, \quad (8)$$

текущая траектория астероида в прямоугольной системе координат (выводится на монитор компьютера)

$$X_a = -r_a \cdot \cos \varphi_a, \quad Y_a = r_a \cdot \sin \varphi, \quad (9)$$

эксцентрисическая аномалия, в градусах:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_a}{2}\right) = B, \\ E &= 2 \operatorname{arctg}[B], \end{aligned} \quad (10)$$

средняя аномалия, в градусах:

$$M = E - K_1 \cdot e \cdot \sin E, \quad (11)$$

текущий интервал времени от прогнозируемого момента столкновения астероида с Землей, в сутках:

$$t_a = T_a \cdot \frac{(M - M_0)}{360}. \quad (12)$$

Полученные пошаговые значения времени ретродвижения астероида t_a используются для расчета положения Земли на ее орбите:

$$\varphi_3 = \varphi_0 - \Delta\varphi_3 = \varphi_0 - \omega_3 \cdot t_a - \text{в градусах},$$

$$\omega_3 = 0,9856 \text{ град/сут.} \quad (13)$$

Текущее положение Земли в прямоугольной системе координат (выводится на монитор компьютера):

$$X_3 = -r_3 \cdot \cos \varphi_3, \quad Y_3 = r_3 \cdot \sin \varphi_3. \quad (14)$$

Остановка цикла проводится при превышении значения M величины M_{CT} , где M_{CT} находится по (6).

На первом этапе $\Delta\varphi = 1^\circ$, после перехода текущего значения μ через M_{CT} осуществляется возврат к началу цикла (7) и предыдущему значению φ_a^{n-1} , которое приравнивается $\varphi_a^{n-1} = \varphi_{01}$ и далее повторяются циклы с новым шагом $\Delta\varphi_i$.

Файл с информацией по астероиду и Земле в каждом шаге запоминается в виде пакетов, привязанных ко времени t_a : X_a , Y_a , E , M , φ_a (астероид), X_3 , Y_3 (Земля). Отдельным файлом запоминается вся информация по астероиду и Земле на момент превышения M величины M_{CT} . Она будет использована для оценки погрешностей расчета и возвратного движения астероида к Земле из точки, соответствующей моменту старта ракеты.

4. Траектория полета ракеты к точке перехвата выбирается из условия совпадения ее с плоскостью орбиты астероида и на момент старта Земля находится на линии апсид в перигелии орбиты астероида (рис. 2).

Выбор параметров орбиты ракеты возможен только методом последовательных приближений, до совпадения времени полета ракеты к точке перехвата астероида со временем движения астероида из точки старта к точке перехвата.

Для этого введем цикл пошагового возрастания эксцентриситета орбиты ракеты

$$e_p = m \cdot \Delta e + e_{p0}, \quad e_p < e, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

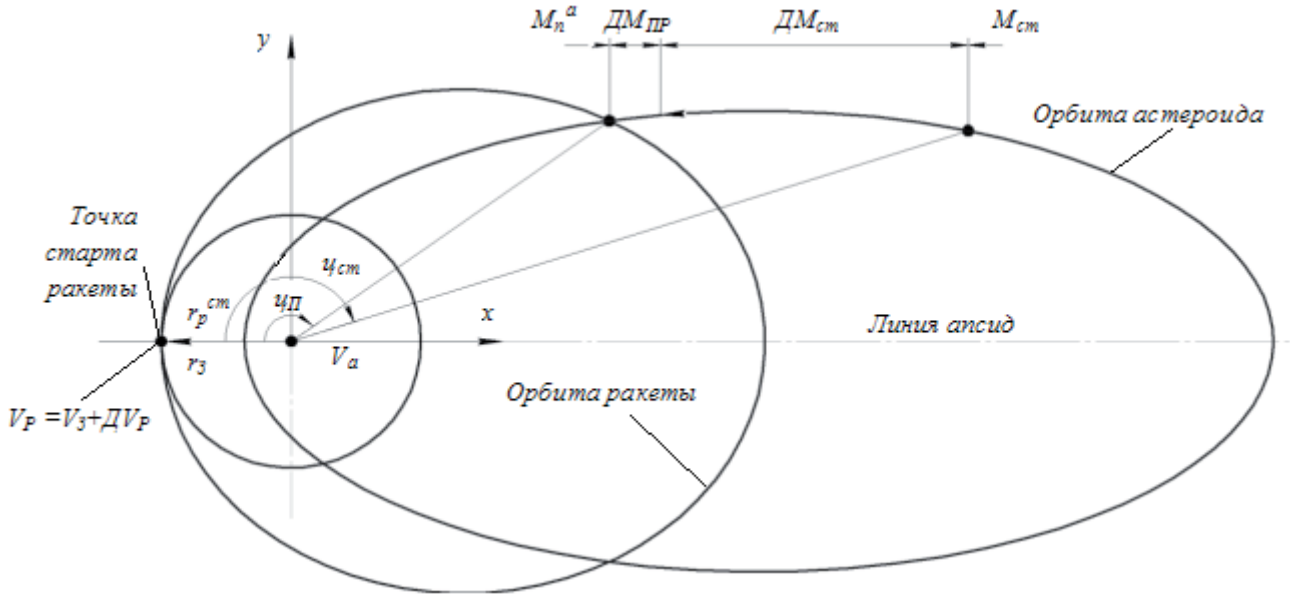


Рис. 2. Выбор траектории полета

В начале полагаем $e_{p0} = 0$, затем в конце цикла в него помещается последнее значение e_{pn} и цикл повторяется, но уже с другим (меньшим) значением шага $\Delta e_1 = 0,1 \cdot \Delta e$, то есть $e_p = e_{p0} + m \cdot \Delta e_1$. Такая схема повышает точность расчета.

Полученное значение эксцентриситета орбиты ракеты e_p используем для пошагового расчета орбиты ракеты a_p, T_p :

$$a_p = \frac{r_3}{1 - e_p}, \quad (16)$$

$$T_p = T_3 \cdot a_p^{1.5}. \quad (17)$$

Из условия равенства радиусов орбит ракеты и астероида в точке перехвата находим истинную аномалию этой точки φ_{Π} :

$$r_{\Pi} = a_p \frac{1 - e_p}{1 + e_p \cos \varphi_{\Pi}} = r_a = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi_{\Pi}} \cdot a,$$

$$a_p \cdot (1 - e_p^2) \cdot (1 + e \cos \varphi_{\Pi}) = a \cdot (1 - e^2) \cdot (1 + e_p \cos \varphi_{\Pi}),$$

$$\cos \varphi_{\Pi} \left[a_p \cdot (1 - e_p^2) \cdot e - a(1 - e^2) \cdot e_p \right] = a(1 - e^2) - a_p \cdot (1 - e_p^2),$$

$$\cos \varphi_{\Pi} = \frac{a(1 - e^2) - a_p(1 - e_p^2)}{e \cdot a_p(1 - e_p^2) - a(1 - e^2) \cdot e_p} = c, \quad \varphi_{\Pi} = \arccos [c]. \quad (18)$$

Длительность полета ракеты t_{Π} до точки перехвата находим из решения уравнения Кеплера, путем определения E_{Π}^p, M_{Π}^p :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{E_{\Pi}^p}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - e_p}{1 + e_p}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_{\Pi}}{2} \right) = \mathcal{D}, \quad E_{\Pi}^p = 2 \arctg [\mathcal{D}] - \text{в градусах}, \quad (19)$$

$$M_{\Pi}^p = E_{\Pi}^p - K_1 \cdot e_p \cdot \sin E_{\Pi}^p - \text{в градусах}, \quad (20)$$

$$t_{\Pi} = T_p \cdot \frac{M_{\Pi}^p}{360}. \quad (21)$$

Положение точки перехвата на орбите астероида, вычисляемое по уравнению (18), позволяет определить углы M_{Π}^a, E_{Π}^a :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{E_{\Pi}^a}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_{\Pi}}{2} \right) = \mathcal{D}_1, \quad E_{\Pi}^a = 2 \arctg [\mathcal{D}_1] - \text{в градусах}, \quad (22)$$

$$M_{\Pi}^a = E_{\Pi}^a - K_1 \cdot e_p \cdot \sin E_{\Pi}^a - \text{в градусах}. \quad (23)$$

За время прилета ракеты t_{Π} в точку перехвата астероид сместится в сторону Земли, которое эквивалентно изменению средней аномалии астероида

$$\Delta M_{\Pi} = \frac{t_{\Pi}}{T_a} \cdot 360 - \text{в градусах}. \quad (24)$$

В результате несовпадения времени прилета ракеты в точку перехвата с приходом астероида в эту точку возникает промах ракеты:

$$\Delta M_{\Pi p} = M_{\Pi}^a - M_{\Pi}^p - \Delta M_{\Pi}. \quad (25)$$

В процессе увеличения эксцентриситета орбиты ракеты значение промаха уменьшается, оставаясь положительным. При появлении отрицательного значения $\Delta M_{\Pi p}$ цикл счета останавливается, а предыдущее значение эксцентриситета орбиты ракеты приравняется $e_p^{n-1} = e_{p0}$ и цикл повторяется с уравнения (15) с новым значением шага $\Delta e_1 = 0,1 \cdot \Delta e$ до повторного перехода $\Delta M_{\Pi p}$ в отрицательную область. При этом величина промаха и параметры орбиты ракеты: e_p, a_p, φ_{Π} запоминаются.

5. Построение траекторий движения ракеты, Земли и астероида в единой временной шкале, связанной с временем движения ракеты:

5.1. Движение ракеты от момента старта

Определение параметров орбиты

$$\varphi_p = l \cdot \Delta\varphi \leq \varphi_{\Pi}, \quad (26)$$

значения φ_{Π} определяются по (18), цикл $l = 1, 2, \dots$

$$r_p = a_p \cdot \frac{1 - e_p^2}{1 + e_p \cdot \cos \varphi_p}, \quad (27)$$

$$X_p = -r_p \cdot \cos \varphi_p, \quad Y_p = r_p \cdot \sin \varphi_p. \quad (28)$$

Определение времени движения

$$\operatorname{tg} \left(\frac{E_p}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - e_p}{1 + e_p}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_p}{2} \right) = A_p, \\ E_p = 2 \operatorname{arctg} [A_p] - \text{в градусах}, \quad (29)$$

$$M_p = E_p - K_1 \cdot e_p \cdot \sin E_p - \text{в градусах}, \quad (30)$$

$$t_p = T_3 \cdot \left(\frac{a_p}{r_3} \right)^{1,5} \cdot \frac{M_p}{360}, \quad (31)$$

Формируется пошаговый файл X_p, Y_p, t_p для вывода на монитор.

5.2. Движение Земли

$$X_3 = -r_3 \cdot \cos(\omega_3 \cdot t_p), \\ Y_3 = r_3 \cdot \sin(\omega_3 \cdot t_p). \quad (32)$$

Формируется пошаговый файл t_p, X_3, Y_3 для вывода на монитор.

5.3. Движение астероида к Земле из упрежденной точки, приведенной к моменту старта M_{CT} .

Формируется обратная шкала времени движения астероида:

$$t_a = t_a^{CT} - t_p. \quad (33)$$

К этому времени из файла X_a, Y_a, E, M, t_a выбираются соответствующие значения X_a, Y_a и в новом временном цикле выстраивается траектория астероида, связанная с движением ракеты до их встречи (раздел 3).

Расчёты траекторий проводятся для двух значений M_{CT} .

6. Исходные данные

1. По астероиду: $a = 3,375 \text{ а.е.}, e = 0,856$.

2. По Земле: $T_3 = 365,25 \text{ сут.}, r_3 = 1 \text{ а.е.}, \omega_3 = 0,9856 \text{ град/сут.}$

3. Константы: $K_1 = 57,32^\circ$.

4. Шаг итерации: $\Delta\varphi = 1^\circ, \Delta\varphi_1 = 0,1 \cdot \Delta\varphi, \Delta e = 0,05, \Delta e_1 = 0,1 \cdot \Delta e$.

Параметры орбит, приведённых на рис. 1, 2, следующие:

Орбита	$a, \text{ а.е.}$	e	$T, \text{ сут.}$
астероида	3,375	0,856	2264,6
ракеты	1,8875	0,48	947,2
Земли	1,0	0	365,25

Алгоритм расчета и визуализации траектории перехвата ракетой астероида реализован в среде Adobe Flex.

Библиографические ссылки

1. Астрономический календарь. Постоянная часть. Изд. 6. – М. : Наука, 1973. – 728 с.
2. Чеботарев В. Е. Проектирование космических аппаратов систем информационного обеспечения : в 2 кн. Кн. 2. Внутреннее проектирование космического аппарата / Сиб. гос. аэрокосм. ун-т. – Красноярск, 2005. – 168 с.