

**ЯДЕРНАЯ  
И АЛЬТЕРНАТИВНАЯ  
ЭНЕРГЕТИКА**

УДК 621.3.064

**А. А. Ковель**

*Сибирская пожарно-спасательная академия –  
филиал Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России,  
г. Железногорск, Красноярский край, Россия*

## ОПЕРАТИВНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ (КОНЦЕПЦИЯ И РЕАЛИЗАЦИЯ ИНЖЕНЕРНОГО МЕТОДА)

*Предложен оперативный метод описания переходных процессов в электрических цепях, показано применение метода.*

*Ключевые слова: переходный процесс, нулевые условия, уровень условного нуля.*

**A. A. Kovel**

*Siberian Institute of Fire Safety – branch of St. Petersburg University  
of State Fire Service of EMERCOM of Russia, Zheleznogorsk, Russia*

## THE EFFICIENT METHOD OF TRANSIENTS IN ELECTRIC CIRCUITS ANALYSIS (CONCEPTION AND IMPLEMENTATION OF ENGINEERING APPROACH)

*The efficient method of transients in electric circuits representation is proposed,  
the method application is described.*

*Keywords: transient, zero conditions, reference level.*

Переходные процессы (ПП) в электрических цепях (ЭЦ) – специфический режим работы ЭЦ, что отражают математические модели (ММ) процессов, отличающиеся от ММ стационарных (установившихся) процессов, а также их возможные последствия.

Внимание к переходным процессам также определяет то обстоятельство, что прогрессирующее применение цифровой электроники делает их элементом нормального функционирования устройств наравне со стационарными режимами, а не эпизодическими явлениями при включении или выключении (коммутациях), что характерно для аналоговых устройств.

Классический метод описания переходных процессов как сумма частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения однородного уравнения зачастую вызывает затруднения при физической интерпретации решения, так как понятия принужденного и свободного состояний ЭЦ – только удобная математическая модель, обеспечивающая расчет переходных процессов в линейных цепях [1].

Предложенный метод (инженерный) исходит только из физических процессов в ЭЦ.

Переходный процесс – изменение во времени параметров ЭЦ (токов, напряжений, зарядов), содержащей реактивные элементы (индуктивности, конденсаторы – РЭ, рис. 1), при переходе ЭЦ из одного стационарного

(установившегося) состояния в другое. На схеме эти состояния определяют два положения ключа (Кл).

Анализ переходных процессов предполагает определенные начальные условия, то есть значения токов и напряжений в ЭЦ при  $t = 0$ . Если непосредственно перед коммутацией (замыкание или размыкание Кл) все токи в ветвях и напряжения на пассивных элементах ЭЦ равны нулю, то имеют место нулевые начальные условия. И токи в ветвях с индуктивными элементами и напряжения на конденсаторах при переходных процессах начинают изменяться с нулевых уровней. При ненулевых условиях – с тех уровней, которые они имели непосредственно до коммутации [2].

После коммутации, используя правила Кирхгофа, состояние ЭЦ (зависимости между токами и напряжениями) описывают дифференциальными уравнениями первого порядка [1]:

$$\frac{d[E - i_L(t)R]}{E - i_L(t)R} = -\frac{R}{L} dt \quad \text{и} \quad \frac{d[E - u_C(t)]}{E - u_C(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

при подключении РЭ к источнику  $E$  (рис. 1, а, где в первом случае РЭ –  $L$ , во втором –  $C$ ).

При отключении РЭ от источника  $E$  (рис. 1, б) –

$$\frac{di_L(t)}{i_L(t)} = -\frac{R}{L} dt \quad \text{и} \quad \frac{du_C(t)}{u_C(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

Результат интегрирования уравнений –  $i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  и  $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  при подключении и  $i_L(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$  и  $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$  при отключении РЭ от источника  $E$  ( $\tau$  – постоянные времени  $RL$  и  $RC$  ветвей, характеризующие динамику переходного процесса, равные соответственно  $\frac{L}{R}$  и  $RC$ ).

Обобщая полученные результаты и предваряя дальнейшие построения, первый и второй результаты обозначены как

$$Y(t) = \Delta Y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{и} \quad Y(t) = \Delta Y e^{-\frac{t}{\tau}}$$

где  $Y$  и  $\Delta Y$  – соответственно уровень и приращение уровня параметра (тока, напряжения), отражающие возрастающую и убывающую экспоненциальные зависимости при нулевых начальных условиях (рис. 2, а, б).

Приведенные результаты позволяют перейти к рассмотрению переходных процессов при ненулевых начальных условиях.

В графическом представлении фрагменты состояний параметров при ненулевых начальных условиях даны на рис. 3, а, б,

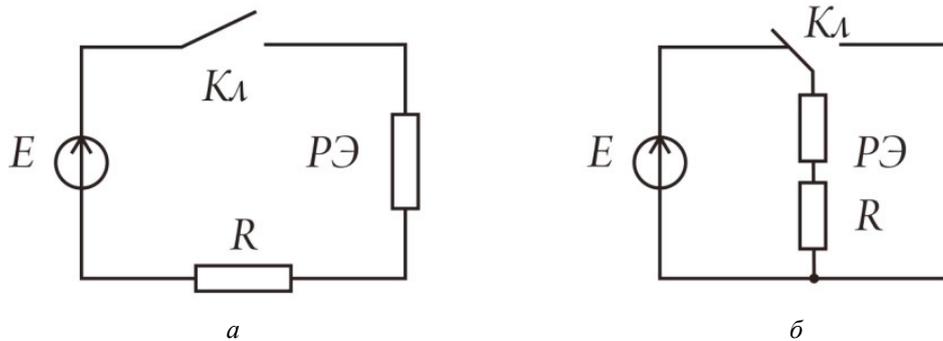


Рис. 1. Электрическая цепь

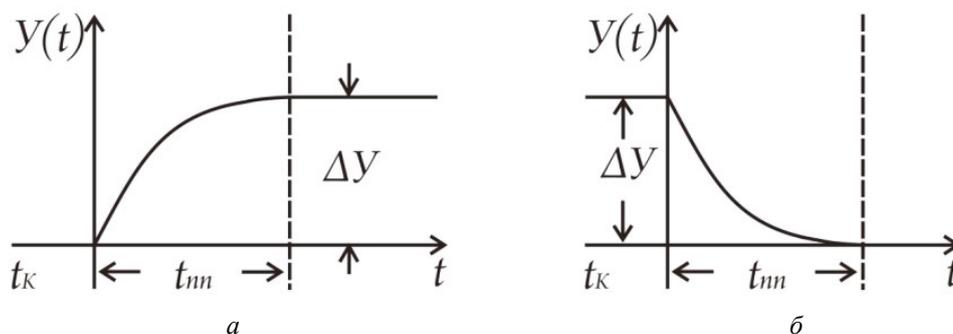


Рис. 2. Графики приращений параметров при переходных процессах:  $t_k = 0$  – момент (начало) коммутации,  $t_m$  – продолжительность переходного процесса

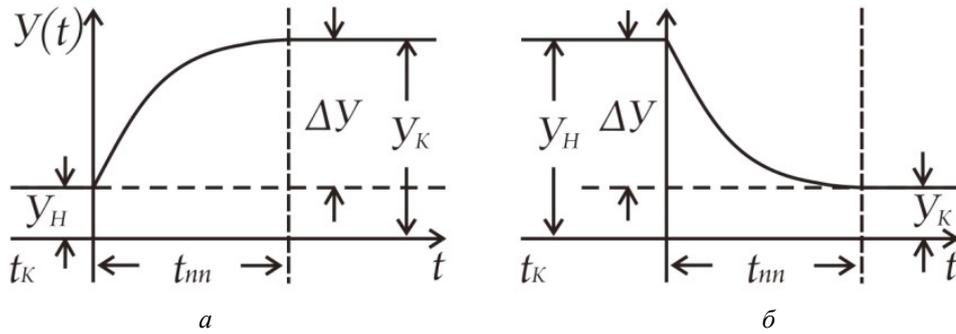


Рис. 3. Фрагменты состояния параметров переходных процессов:  $Y_n$  и  $Y_k$  – соответственно начальный и конечный уровни параметров, отражающие стационарные состояния в ЭЦ до и после переходных процессов.

Таким образом, если до коммутации ( $t_k = 0$ ) уровень параметра (начальный) был  $Y_n$ , а после  $t_k + t_{mn}$  стал  $Y_k$  (конечный), то переходный процесс определяет приращение уровня  $\Delta Y$ :

$$\Delta Y = |Y_n - Y_k|$$

в интервале  $t_{mn}$ .

Это обусловлено тем, что процессы в ЭЦ, содержащих РЭ ( $L, C$ ), обусловлены скоростями изменения токов или напряжений ( $di/dt, du/dt$ ) и не зависят от стационарных начальных уровней. То есть только приращения уровней параметров на временном промежутке  $t_{mn}$  запускают соответствующие переходные процессы.

Это хорошо иллюстрирует операторное представление переходного процесса:

$$L\{f'(t)\} \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0),$$

то есть при наличии исходного уровня [ $Y_n = f(0)$ ] он исключается из формирования переходного процесса, и в обоих случаях [ $f(0) = 0$  – нулевые начальные условия и  $f(0) \neq 0$  – ненулевые начальные условия] его картину определяет только компонента  $pF(p)$  – производная от  $f(t)$ .

Это позволяет сформулировать алгоритм получения математических моделей переходных процессов в ЭЦ при ненулевых начальных условиях, именуемый далее инженерным методом:

- применяя правила Кирхгофа (или другие методы расчета), определяют уровни параметров стационарных состояний ЭЦ до начала переходного процесса ( $Y_n$ ) и после его окончания ( $Y_k$ );
- сопоставляя полученные уровни, определяют приращения ( $\Delta Y$ ) соответствующих параметров (токов, напряжений, зарядов);

– один из уровней ( $Y_n$  или  $Y_k$ ) принимают за уровень условного нуля –  $Y(Y_0)$ , относительно которого рассматривают развитие переходных процессов;

– для отражения хода переходного процесса используют математические модели, полученные при описании переходных процессов для нулевых начальных условий:

$$Y(t) = \Delta Y \cdot \text{ЭМ1} \text{ и } Y(t) = \Delta Y \cdot \text{ЭМ2},$$

где ЭМ1 –  $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ , а ЭМ2 –  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  (соответствующие экспоненциальные множители);

– к полученным результатам добавляют исключенные уровни условного нуля [ $Y(Y_0)$ ] и получают окончательные математические модели соответствующих переходных процессов.

Для иллюстрации представлены примеры описания переходных процессов в простых ЭЦ, полученные операторным и инженерным методами.

На рис. 4 – традиционное и операторное представление электрической схемы, содержащей источник ЭДС ( $E$ ),  $R$  и  $L$  элементы. В исходном состоянии (Кл разомкнут) ток, протекающий в ветви  $L$ , равен  $\frac{E}{2R}$ .

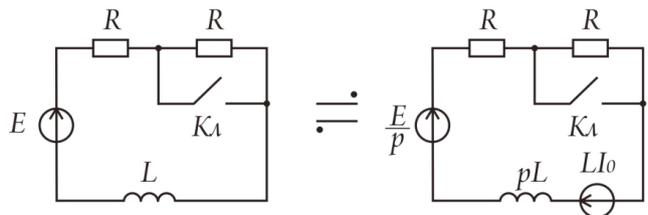


Рис. 4. Электрические схемы с элементами  $E, R$  и  $L$

При коммутации (замыкание ключа)

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \frac{E(p) + LI_0}{R + pL} = \frac{\frac{E}{p} + \frac{LE}{2R}}{R + pL} = \\
 &= \frac{E}{p} \frac{1}{R + pL} + \frac{0,5E}{R} \frac{L}{R + pL} = \\
 &= \frac{E}{R} \frac{1}{p \left(1 + \frac{pL}{R}\right)} + \frac{0,5E}{R} \frac{L}{R \left(1 + \frac{pL}{R}\right)} = \\
 &= \frac{E}{R} \frac{\frac{R}{L}}{p \left(p + \frac{R}{L}\right)} + \frac{0,5E}{R} \frac{1}{p + \frac{R}{L}} = \\
 &= \frac{E}{R} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} + \frac{0,5E}{R} \frac{1}{p + \alpha} = \\
 &= \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{0,5E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= \frac{E}{R} - \frac{0,5E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} (1 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}}) = i(t).
 \end{aligned}$$

Применение инженерного метода предпочтительно начать с графического представления переходного процесса (рис. 5).

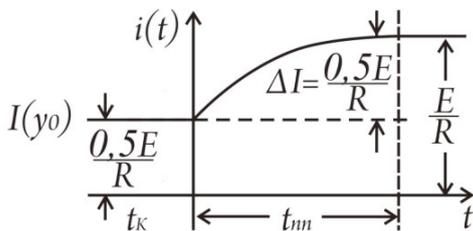


Рис. 5. Графическое представление переходного процесса

После коммутации ( $t_k = 0$ ) начинается переходный процесс с исходного стационарного уровня ( $I = \frac{0,5E}{R}$ ), который принимают за уровень условного нуля  $I(y_0) = \frac{0,5E}{R}$ . Тогда

$$\underline{i(t)} = \Delta I \cdot \text{ЭМ1} = \frac{0,5E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) -$$

изменение тока относительно условного нуля (черта снизу). Окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 \underline{i(t)} &= \underline{i(t)} + I(y_0) = \\
 &= \frac{0,5E}{R} (1 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{0,5E}{R} = \\
 &= \frac{E}{R} - \frac{0,5E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} (1 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}}).
 \end{aligned}$$

Результат соответствует тому, который получен операторным методом, но более простыми средствами.

Второй пример (рис. 6).

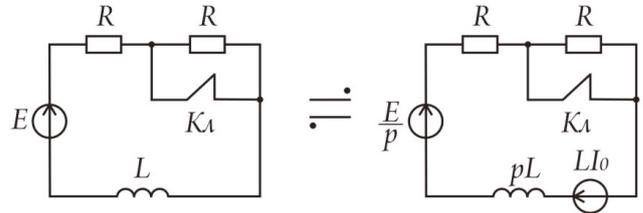


Рис. 6. Электрическая схема

Исходное состояние – Кл замкнут.

$$I(p) = \frac{E(p) + LI_0}{2R + pL} = \frac{\frac{E}{p} + \frac{LE}{R}}{2R + pL} -$$

ток после размыкания КЛ.

После преобразований, аналогичных первому примеру, –

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \frac{0,5E}{R} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} + E \frac{1}{p + \alpha} = \\
 &= \frac{0,5E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + E e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{0,5E}{R} + \frac{0,5E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= \frac{0,5E}{R} (1 + e^{-\frac{t}{\tau}}) = i(t).
 \end{aligned}$$

Графическое представление переходного процесса – рис. 7.

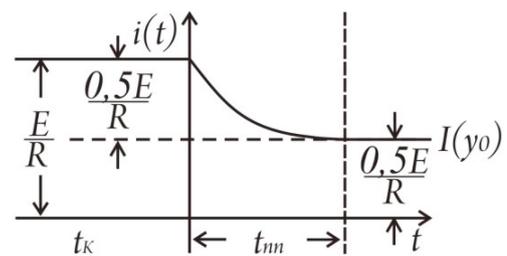


Рис. 7. Графическое представление переходного процесса

На рис. 7:  $\frac{E}{R}$  – ток исходного (докоммутационного) стационарного уровня;  $\frac{0,5E}{R}$  – ток конечного (посткоммутационного) уровня, который является уровнем условного нуля;  $\frac{0,5E}{R} = \Delta I$  – изменение тока между двумя стационарными уровнями за время  $t_m$ . Тогда

$$\underline{i(t)} = \Delta i \cdot \text{ЭМ2} = \frac{0,5E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} -$$

ММ переходного процесса относительно условного нуля и

$$i(t) = \underline{i(t)} + i(y_0) = \frac{0,5E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{0,5E}{R} = \frac{0,5E}{R} (1 + e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Оба способа (операторный и инженерный) дают одинаковый результат.

Далее – сравнение классического и инженерного методов. Использован пример из [2] – рис. 8.

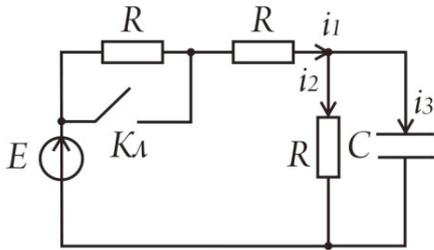


Рис. 8. Электрическая схема

По условиям –  $E = 150 \text{ В}$ ,  $R = 50 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ .

Токи, протекающие в ветвях схемы ( $i_1, i_2, i_3$ ) после коммутации, находят в результате решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в схеме. Пусть это будут уравнения Кирхгофа:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

$$i_1 R + i_2 R = E,$$

$$i_2 R - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0.$$

До коммутации

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{3R} = 1(A), \quad i_3(0_-) = 0,$$

$$u_C(0_-) = i_2(0_-)R = 1 \cdot 50 = 50(B).$$

После коммутации

$$i_1(0_+)_{np} = i_2(0_+)_{np} = \frac{E}{2R} = \frac{150}{100} = 1,5(A),$$

$$u_C(0_+)_{np} = i_2(0_+)_{np} R = 1,5 \cdot 50 = 75(B).$$

Для  $t(0_+)$  уравнения Кирхгофа для двух контуров:  $i_1(0_+)R + u_C(0_+) = E$ ,  $i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R}$ .

Так как  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$  – второе правило коммутации, то

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_-)}{R} = \frac{150 - 50}{50} = 2(A),$$

$$(1 \text{ e } ). \quad i_2(0_+)_{np} = \frac{u_C(0_-)}{R} = \frac{50}{50} = 1(A).$$

Тогда

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 1(A).$$

Свободные составляющие токов и напряжений при  $t(0_+)$  – разности между полными и принужденными значениями:

$$u_C(0_+)_{св} = u_C(0_+) - u_C(0_+)_{np} = 50 - 75 = -25(B);$$

$$i_1(0_+)_{св} = i_1(0_+) - i_1(0_+)_{np} = 2 - 1,5 = 0,5(A);$$

$$i_2(0_+)_{св} = i_2(0_+) - i_2(0_+)_{np} = 1 - 1,5 = -0,5(A);$$

$$i_3(0_+)_{св} = i_3(0_+) - i_3(0_+)_{np} = 1 - 0 = 1(A).$$

Так как

$$i_{3св} = C \frac{du_{Cсв}}{dt},$$

$$\text{то } \frac{du_{Cсв}}{dt} = \frac{i_{3св}}{C} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = 10^4 (B/C).$$

Каждый ток – сумма принужденной и свободной составляющих –  $i(0_+)_{св}$ , умноженной на  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  –

$$i_1(t) = 1,5 + 0,5e^{-\frac{t}{\tau}} (A), \quad i_2(t) = 1,5 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}} (A),$$

$$i_3(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A), \quad u_C(t) = 75 - 25e^{-\frac{t}{\tau}} (B).$$

Получение тех же параметров инженерным методом представлено на рис. 9.

На рисунке использованы данные расчета классическим методом.

$$\underline{i_2(t)} = \Delta i_2 \cdot \text{ЭМ1} = 0,5(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$

$$i_2(t) = \underline{i_2(t)} + i_2(y_0) = 0,5(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + 1 = 1,5 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}} (A);$$

$$\underline{u_C(t)} = \Delta u_C \cdot \text{ЭМ1} = 25(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$

$$u_C(t) = \underline{u_C(t)} + u_C(y_0) = 25(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + 50 = 75 - 25e^{-\frac{t}{\tau}} (B);$$

$$i_3(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -C \left( -\frac{1}{\tau} \right) 25e^{-\frac{t}{\tau}} = C \frac{1}{0,5RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}} (A);$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 1,5 - 0,5e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} = 1,5 + 0,5e^{-\frac{t}{\tau}} (A).$$

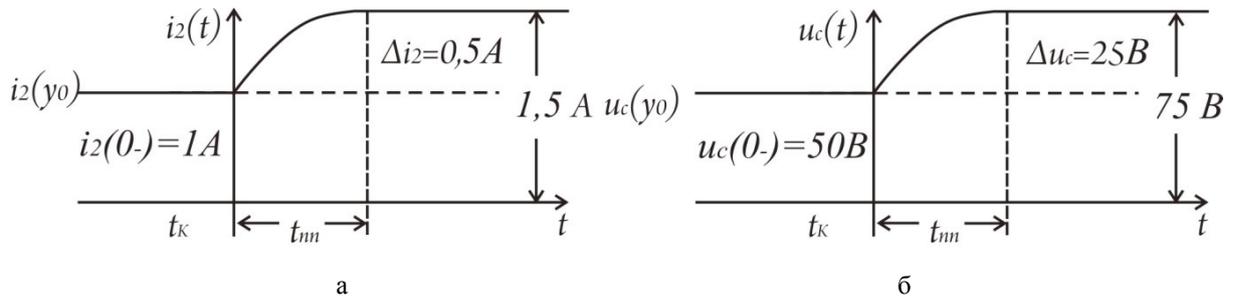


Рис. 9. Графическое представление переходного процесса

Оба решения (классическим и инженерным методами) дают одинаковый результат.

Следует отметить, что при определении  $i_3(t)$  значение  $\tau = 0,5RC$ , так как применение метода эквивалентного генератора относительно нагрузки ( $C$ ) дает  $R_{\text{вн}} = 0,5R$  (оба  $R$  оказываются соединенными параллельно).

Сравним анализ процесса, связанного с сохранением заряда (второе правило коммутации), классическим и операторным методами [1] (рис. 10).

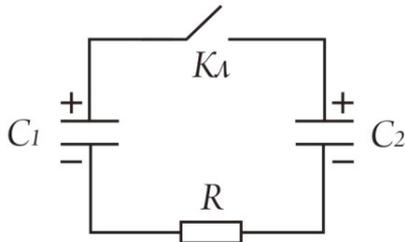


Рис. 10. Схема для сравнения методов

При начальных  $U_{C10} = 100$  В,  $U_{C20} = 25$  В и  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $R = 75$  Ом необходимо рассчитать напряжение на конденсаторах и ток перезаряда после замыкания ключа Кλ.

В установившемся режиме ток равен нулю, то есть

$$U_{1np} - U_{2np} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{q_{1np}}{C_1} = \frac{q_{2np}}{C_2}.$$

По закону сохранения заряда

$$q_{10} + q_{20} = q_{1np} + q_{2np},$$

где

$$q_{10} = C_1 U_{C10}, \quad q_{20} = C_2 U_{C20}, \quad -$$

$$q_{1np} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (C_1 U_{C10} + U_{C20}) = C_1 U_{1np},$$

$$q_{2np} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (C_1 U_{C10} + U_{C20}) = C_2 U_{2np},$$

$$U_{1np} = U_{2np} = \frac{C_1 U_{C10} + C_2 U_{C20}}{C_1 + C_2} = 50(B).$$

Тогда

$$U_1 = U_{1np} + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

По второму закону коммутации  $U_1(0_+) = U_{C10}$ , поэтому

$$U_1(0_+) = 50 + A \quad \text{и}$$

$$A = U_1(0_+) - 50 = 50(B) \quad \text{и}$$

$$U_1(t) = 50 + 50 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Аналогично

$$U_2(t) = 50 - 25 e^{-\frac{t}{\tau}}(B),$$

а

$$i(t) = C_1 \frac{du_1}{dt} = -C_2 \frac{du_2}{dt} = -e^{-\frac{t}{\tau}}(A),$$

где  $\tau = RC_{\text{эkv}} = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$

так как конденсаторы оказываются включенными последовательно.

Расчет инженерным методом (рис. 11).

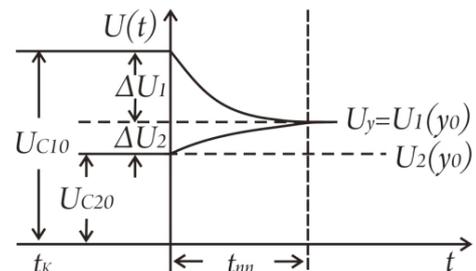


Рис. 11. Для расчета инженерным методом

После замыкания КЛ и завершения переходного процесса на обоих конденсаторах установится одинаковое напряжение  $U_y$  (рис. 11), относительно которого устанавливают приращения напряжений ( $\pm \Delta U$ ) на каждом конденсаторе после их перезаряда.

По закону сохранения заряда

$$q_{10} + q_{20} = C_1 U_y - C_2 U_y = C_1 U_{C10} - C_2 U_{C20},$$

$$U_y = \frac{C_1 U_{C10} + C_2 U_{C20}}{C_1 + C_2} = 50(B).$$

Тогда

$$\Delta U_1 = U_{C10} - U_y = 50(B),$$

$$\Delta U_2 = U_y - U_{C20} = 25(B),$$

$$u_1(t) \approx u_1 + \Delta U_1 e^{-\frac{t}{\tau}} = 50e^{-\frac{t}{\tau}}(B),$$

$$u_1(t) = u_1(t) - u_1(y_0) = 50e^{-\frac{t}{\tau}} - 50 = 50(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})(B);$$

$$u_2(t) \approx u_2 + \Delta U_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = 25(1 + e^{-\frac{t}{\tau}})(B),$$

$$u_2(t) = u_2(t) + u_2(y_0) = 25(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + 25 = 50 - 25e^{-\frac{t}{\tau}}(B);$$

$$i(t) = C \frac{du_1}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}}(A).$$

Как и при решении классическим методом,

$$\tau = RC_{\text{экв}} \quad R = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$75 \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \cdot 10^{-6}(C).$$

Показано, что инженерный метод дает те же результаты, что и традиционные методы, но гораздо оперативнее и «меньшей кровью».

Большой опыт применения традиционных методов показал их широкие возможности, и эти возможности, требующие высокой квалификации специалистов, незаменимы при глубоком изучении «тонких» деталей при исследовании различных процессов в ЭЦ. Когда же речь идет о получении оперативных результатов, оперативном построении математических моделей переходных процессов при экспериментальной отработке, регулировке и испытаниях электронных и электрических устройств, инженерный метод является очень продуктивным.

### Библиографические ссылки

1. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. М.: Энергоиздат, 1989. 749 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. М.: Гардарики, 2007. 701 с.

Статья поступила в редакцию  
05.11.2014 г.