

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

Р. А. Сабиров

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнёва,
г. Красноярск, Российская Федерация*

Сосуды высокого давления, в том числе сферические баки, используются в аэрокосмической технике. Если не допускаются большие деформации, тогда для решения вопроса обеспечения прочности конструкции применяется уравнение равновесия Лапласа с приложением нормативных коэффициентов запаса по назначению. Составлено уравнение равновесия сферической оболочки по деформированной схеме, то есть с учетом величины прогиба, на которую увеличивается первоначальный радиус оболочки от действия давления. Неизвестными параметрами здесь являются прогиб и внутреннее мембранное усилие, возникающее в оболочке. Считается, что первоначальный объем материала оболочки при ее деформировании не изменяется, так что толщина есть величина переменная. Учет этих параметров преобразует уравнение равновесия в нелинейное уравнение, связывающее прогиб и величину внутреннего давления. Постоянными параметрами в это уравнение входят первоначальный радиус, исходный объем материала оболочки и модуль Юнга. В примере деформирования шара рассмотрена взаимосвязь прогиба с внутренним давлением, внутренним объемом, напряжением и толщиной стенки при условии несжимаемости материала. Приведены графики увеличения внутреннего объема шара, уменьшения толщины стенки, увеличения напряжения и изменения внутреннего усилия. Вывод, что в шаровой тонкой оболочке так связаны между собой внутреннее давление, прогиб, внутренний объем и толщина стенки, что давление увеличивается до определенного значения, затем оно начинает уменьшаться, привел к экспериментам с сообщающимися сосудами – воздушными шариками.

Ключевые слова: расчет напряженного и деформированного состояния, большие перемещения, давление в шаре.

Введение

Сосуды высокого давления, в том числе и сферические баки, используются в аэрокосмической технике, также имеют широкое применение в быту. Если не допускаются большие деформации, тогда для решения вопроса обеспечения прочности конструкции применяется уравнение равновесия Лапласа [1] с приложением нормативных коэффициентов запаса в соответствии с назначением. Для тонкостенных сосудов давления, изготовленных из композиционных материалов, резины или иных каучуковых материалов, вопросы деформирования от действия давления, в том числе и от изменения давления при стыковке сосудов, в литературе по строительной механике приводятся недостаточно [2–3].

Формулировка задачи. Рассмотрим модель деформирования сферической оболочки. Пусть срединная поверхность оболочки имеет первоначальный радиус R_0 . От действия давления q первоначальный радиус оболочки увеличивается на величину w , которую назовем прогибом. Составим уравнение равновесия по деформированной схеме, из которого вычислим внутреннее мембранное усилие

$$N = \frac{q(R_0 + w)}{2}. \quad (1)$$

Положим упругое деформирование материала в рамках закона Гука [4]:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга; ε – относительная продольная деформация оболочки [4],

$$\varepsilon = \frac{w}{R_0}. \quad (3)$$

Допуская равномерное распределение напряжения σ по толщине t , имеем

$$N = \sigma t. \quad (4)$$

Объем материала оболочки вычислим по формуле

$$V_m = 4\pi R_0^2 t_0. \quad (5)$$

Здесь t_0 – начальная толщина.

Учитывая, что объем материала V_m оболочки при ее деформировании не изменяется, толщина t будет величиной переменной,

$$t = \frac{V_m}{4\pi(R_0 + w)^2}. \quad (6)$$

Подставив соотношения (2)–(6) в уравнение (1), получим нелинейное уравнение, связывающее нагрузку и прогиб:

$$\frac{w}{(R_0 + w)^3} - \frac{2\pi R_0 q}{E V_m} = 0. \quad (7)$$

Решение. Рассмотрим оболочку в виде шара с начальным радиусом $R_0 = 0,1$ м и начальной толщиной $t_0 = 10^{-3}$ м. Материал примем из группы каучуковых, имеющих $E = 1$ МПа. Примем внутреннее давление $q = 2000$ Па. Для этих данных на рис. 1 покажем графическое решение уравнения (7). Из рисунка видим, что одной и той же нагрузке соответствуют три корня, из которых отрицательное значение отбрасываем. Принимаем во внимание два прогиба, равные $w = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м и $w = 14 \cdot 10^{-2}$ м.

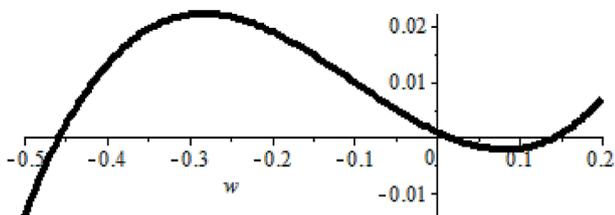


Рис. 1. График невязки нелинейного уравнения

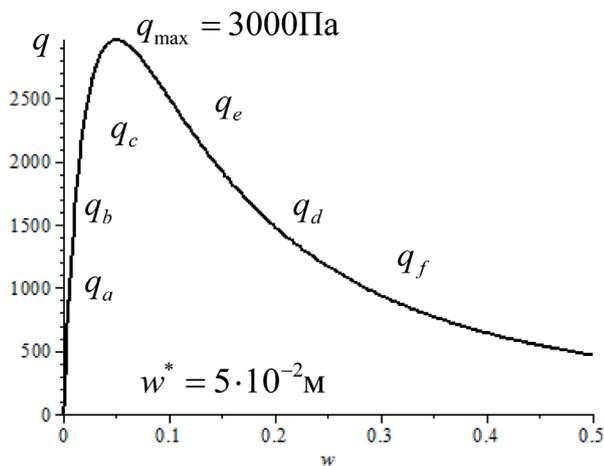


Рис. 2. График, связывающий давление и прогиб

Рассмотрим взаимосвязь прогиба с внутренним давлением, внутренним объемом шарового баллона, напряжением и толщиной стенки при условии несжимаемости материала.

Выразив из уравнения (7) давление, получим

$$q = \frac{E V_m w}{2\pi R_0 (R_0 + w)^3}. \quad (8)$$

Тогда из условия $dq/dw = 0$ получим значение максимального давления $q = 2E V_m / 27\pi R_0^3$. Максимальное давление соответствует прогибу $w^* = R_0/2$. Изобразим функцию изменения давления (8) в области $0 \leq w \leq 0,5$ м на рис. 2, где максимальное давление $q = 3000$ Па, а прогиб $w^* = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Из графика видно, что одной и той же нагрузке q соответствуют два значения прогиба, кроме точки w^* .

Приведем еще четыре графика на рис. 3:

- увеличение внутреннего объема оболочки $V = 4\pi(R_0 + w)^3/3$ (рис. 3, а);
- уменьшение толщины $t = V_m / 4\pi(R_0 + w)^2$ (рис. 3, б);
- изменение напряжения (рис. 3, в), вычисляемого по формулам (2) и (3);
- изменение внутреннего усилия, найденного по формуле (4) (рис. 3, г).

Заметим, что напряжения в области $0 \leq w \leq 0,5$ м не превышают значения 5 МПа, что не превосходит предела прочности резины 13–14 МПа.

Анализ решений. Рассмотрим соединяющиеся шаровые сосуды давления (рис. 4).

1. Надуем два одинаковых шарика разными давлениями q_a и q_b , но не превышающими давления q_{\max} (рис. 1). Затем шарики соединим. Давления в шариках выравниваются, и шарики приобретают одинаковый радиус.

2. Если первый шарик надуть давлением $q_c < q_{\max}$ в области $w < w^*$ (рис. 1), а второй надуть давлением $q_d < q_{\max}$ в области $w < w^*$ (пусть $q_c > q_d$), тогда при выравнивании давления шарик меньшего диаметра раздувает шарик большего диаметра.

3. Вновь одинаковые шарики надуем давлениями q_e и q_f (рис. 1), превышающими q_{\max} , но разными ($q_e > q_f$). Шарик меньшего диаметра уменьшается, накачивая шарик большой.

Физические эксперименты по взаимодействию сообщающихся сосудов давления – воздушных шариков проведены в [5]. На рис. 4 представлены фотографии примера раздувания шарика большего диаметра шариком, который изначально имел меньший диаметр, но большее давление.

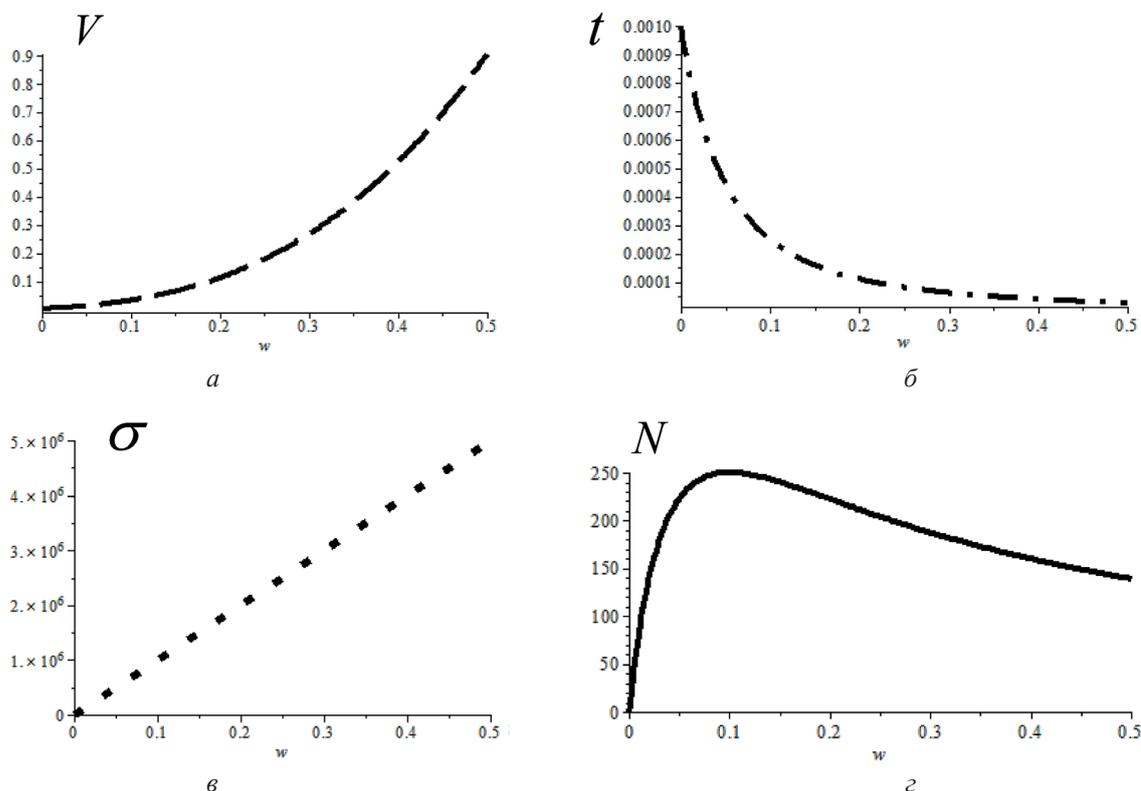


Рис. 3. Графики, характеризующие изменения переменных параметров шара: a – увеличение внутреннего объема; b – уменьшение толщины; v – изменение напряжения; z – изменение внутреннего усилия



Рис. 4. Фотографии раздувания шарика большого диаметра шариком, который изначально имел меньший диаметр, но большее давление

Заключение

В шаровой оболочке внутреннее давление, прогиб, внутренний объем и толщина стенки так связаны между собой, что давление увеличивается до определенного значения, затем оно

начинает уменьшаться. Одному и тому же давлению соответствуют два деформированных состояния.

Вопросы деформирования тонкостенных оболочек, допускающих существенные прогибы, требуют изучения.

Список литературы

1. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М. : Физматгиз, 1959. 400 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М. : Физматгиз, 1963. 880 с.
3. Саусвел Р. В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 675 с.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.

5. Моделирование шарового сосуда по деформированной схеме / А. В. Изохватов, С. А. Полеготченков, Л. А. Бурим, Т. В. Дадыко, И. А. Моторкин ; науч. рук. – канд. техн. наук Р. А. Сабиров // Сборник материалов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Перспектив-2016», посвящённой Году образования в Содружестве Независимых Государств, Сибирский федеральный университет, 15–25 апреля 2016, г. Красноярск, с. 34–38. [Электронный ресурс] <http://conf.sfu-kras.ru/mn2016/>. (дата обращения: 01.09.2016).

NONLINEAR DEFORMATION OF A THIN SPHERICAL SHELL UNDER PRESSURE

R. A. Sabirov

Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russian Federation

45

Pressure vessels, including spherical tanks, used in aerospace technology. If not allowed large deformation, then to resolve the issue ensure the integrity of the design is the balance equation of Laplace with the regulatory application of safety factors on purpose. The equations of equilibrium of a spherical shell on the deformed scheme, i.e. taking into account the magnitude of deflection, which increases the initial radius of the shell from the action of pressure. The unknown parameters are the bending and membrane internal stress occurring in the shell. It is believed that the initial amount of shell material during its deformation does not change, so the thickness is a variable. Consideration of these parameters transforms the equation of equilibrium in a nonlinear equation linking the deflection and the magnitude of internal pressure. Constant parameters in this equation include the initial radius, the initial volume of the shell material and the Young's modulus. An example of the deformation of the ball, which examined the relationship of the deflection on the internal pressure, internal volume, pressure and wall thickness assuming incompressibility of the material. Graphs of increase in the internal volume of the balloon, reducing the wall thickness, increase the voltage and change of internal stress. The conclusion is that in the ball thin shell, connected the internal pressure, deflection, internal volume and wall thickness, the pressure increases to a certain value, then it starts to decrease, has led to experimentation with communicating vessels – balloons.

Key words: calculation of the stress and deformations, large displacements, the pressure in the balloon.

References

1. Van Czi-de. Prikladnaja teorija uprugosti [Applied theory of elasticity]. Moscow : Fizmatgiz, 1959. 400 p.
2. Vol'mir A. S. Ustojchivost' uprugih sistem [Stability of elastic systems]. Moscow : Fizmatgiz, 1963. 880 p.
3. Sausvel R. V. [Southwell R. V.] Vvedenie v teoriju uprugosti dlja inzhenerov i fizikov. Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoju literatury [An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists]. M., 1948. 675 p.
4. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. Teorija uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow : Nauka, 1975. 576 p.
5. Modelirovanie sharovogo sosuda po deformirovannoj sheme [Simulation of ball vessel on the deformed scheme] / A. V. Izohvatov, S. A. Polegotchenkov, L. A. Buryim, T. V. Dadyko, I. A. Motorkin ; Nauchnyj rukovoditel' – kand. tehn. nauk R. A. Sabirov // Sbornik materialov Mezhdunarodnoj konferencii studentov, aspirantov i molodyh uchjonyh «Prospekt Svobodnyj-2016», posvjashhjonnoj Godu obrazovanija v Sodruzhestve Nezavisimyh Gosudarstv, Sibirskij federal'nyj universitet, 15–25 aprelja 2016, Krasnojarsk, p. 34–38. [Jelektronnyj resurs] <http://conf.sfu-kras.ru/mn2016/>.