

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ МАЛЫМ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВИГАТЕЛЯ-МАХОВИКА НА ОСНОВЕ МЕТОДА УПРАВЛЕНИЯ С ПОВОДЫРЕМ

О. А. Толпегин, П. Ю. Литвинова

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация*

Рассматривается управление малым космическим аппаратом с использованием двигателя-маховика при действии возмущений, статистические свойства которых неизвестны, но ограничены по абсолютной величине. Задача рассматривается как дифференциальная игра двух игроков, так как в качестве одного игрока, стратегия которого неизвестна, выступает возмущающий момент, а в качестве другого игрока – космический аппарат, управление которого нужно выбрать. Особенность решения состоит в том, что множество управлений малого космического аппарата разбивается на два подмножества: одно подмножество управлений используется для компенсации возмущений, а второе – для решения исходной задачи при отсутствии возмущений. Полученная траектория называется траекторией поводыря. Множество управлений разделить на два удается в редких случаях, поэтому в данной работе заранее выделяется подмножество управлений для решения исходной задачи при отсутствии возмущений, строится траектория поводыря, а затем в результате моделирования определяется допустимый диапазон возмущений с заданными статистическими свойствами, при которых возможно решение исходной задачи с допустимой точностью. Этот подход можно использовать как для линейных, так и нелинейных систем.

В статье данный подход используется для стабилизации малого космического аппарата по углу тангажа. Траектория движения поводыря выбрана с помощью метода фазовых траекторий. Влияние возмущений оценивается по времени переходного процесса. Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность предлагаемого подхода для оценки влияния возмущений на возможности управления малого космического аппарата.

Ключевые слова: малый космический аппарат, двигатель-маховик, дифференциальные игры, метод управления с поводырем.

Рассмотрим систему стабилизации по углу тангажа малого космического аппарата (МКА) с двигателем-маховиком. В полете на МКА действует возмущающий момент, статистические характеристики которого неизвестны, но известны пределы, в которых изменяется величина возмущающего момента.

Данную задачу будем рассматривать как дифференциальную игру двух игроков, так как в качестве одного игрока, стратегия которого неизвестна, выступает возмущающий момент, а в качестве другого игрока – космический аппарат, управление которого нужно выбрать.

Рассмотрим систему управления МКА с помощью двигателя-маховика вокруг поперечной

оси, динамика которой определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} d\omega_z/dt = 1/J_3 \cdot (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u + \xi); \\ d\vartheta/dt = \omega_z + v_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_3 = J_z - I$; $u = M_{\text{упр}z} = dK/dt = I \cdot d\Omega_z/dt$; J_3 – момент инерции космического аппарата без учета момента инерции маховика; J_z – момент инерции космического аппарата по оси Oz; I – момент инерции маховика; u – управляющий сигнал; $M_{\text{упр}z}$ – управляющий момент двигателя-маховика по оси Oz, который появляется при разгоне маховика и приложен к корпусу летательного аппарата; K – кинетический момент двигателя-маховика;

Ω_z – проекция абсолютной угловой скорости маховика по оси Oz; ω_z – угловая скорость космического аппарата по оси Oz; ϑ – угол тангажа; v_0 – круговая скорость вращения космического аппарата; k_ω и k_u – передаточные числа системы управления; ξ – возмущающий момент [1].

Управляющий момент удовлетворяет заданному ограничению:

$$|u| \leq \alpha. \quad (2)$$

Возмущающий момент ξ характеризует внешние силы и внешние неконтролируемые возмущения, действующие на космический аппарат и удовлетворяющие ограничению:

$$|\xi| \leq \beta = \rho \cdot \alpha, \quad 0 < \rho < 1. \quad (3)$$

Задание ограничения на возмущения в виде (3) дает возможность оценить влияние возмущений на управление МКА по углу тангажа.

Заданы граничные условия:

$$\begin{cases} \text{при } t = t_0 = 0, \quad \omega_z(0) = \omega_{z0} = -v_0, \vartheta(0) = \vartheta_0; \\ \text{при } t = T, \quad \omega_z(T) = \omega_{zT} = -v_0, \vartheta(T) = \vartheta_3. \end{cases} \quad (4)$$

Требуется найти управление, обеспечивающее минимум критерия быстродействия системы:

$$\mathfrak{J} = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min_u. \quad (5)$$

Момент окончания переходного процесса T не фиксирован.

Управление системой (1) при наличии возмущений будем рассматривать как антагонистическую дифференциальную игру двух игроков: первый игрок выбирает управление $u(t)$, а второй игрок – возмущение $\xi(t)$.

Первый игрок стремится минимизировать (5), а второй – максимизировать этот критерий.

Для решения задачи используем игровой метод управления с поводьрем [2, 3].

Множество управлений U МКА, заданного ограничением (2), разобьем на два подмножества: $U1$ и $U2$. Подмножество $U1$ используем для решения сформулированной задачи при отсутствии возмущения. Эту траекторию назовем траекторией поводьря. Подмножество $U2$ используем для компенсации действия возмущений. Подмножество $U2$ будем задавать с помощью коэффициента ρ , который изменяется в диапазоне от 0 до 1. Если $\rho = 1$, то все ресурсы управления используются для компенсации возмущений и $U1 = 0$. При $\rho = 0$ возмущения отсутствуют и $U2 = 0$.

Для исследования действия возмущений предлагается следующий алгоритм.

1. Зададим коэффициент ρ , который изменяется в диапазоне от 0 до 1, и для множества $U1$ ограничение на управление МКА зададим в виде

$$|u| \leq \alpha(1 - \rho). \quad (6)$$

2. При этом ограничении решим задачу оптимального быстродействия при отсутствии возмущений и построим оптимальную траекторию. Эту траекторию назовем траекторией поводьря и запишем в память БЦВМ.

3. Решаем задачу о максимальном сближении траектории движения МКА с траекторией движения поводьря при действии возмущений с ограничением (3) при заданном значении коэффициента ρ . При этом используем все возможности управления МКА, то есть решаем задачу с ограничением (2).

По времени переходного процесса можно оценить влияние возмущений на возможности управления МКА.

Рассмотрим расчет траектории поводьря при заданном значении коэффициента ρ .

Из выражений (2) и (3) возмущение ξ и управление u связаны следующим соотношением:

$$\xi = \rho \cdot u. \quad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что $u \cdot (1 - \rho)$ используется для расчета траектории поводьря, а $(u \cdot \rho)$ расходуется на гашение возмущений.

Перепишем систему управления (1) с учетом формулы (7):

$$\begin{cases} d\omega_z/dt = (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1 - \rho)) \cdot J_3^{-1}; \\ d\vartheta/dt = \omega_z + v_0. \end{cases} \quad (8)$$

От задачи Лагранжа перейдем к задаче Майера. Введем новую переменную $x_0(t)$, определяемую дифференциальным уравнением

$$dx_0/dt = 1$$

и удовлетворяющую начальным условиям:

$$x_0(t_0) = t_0 = 0. \quad (9)$$

Тогда подлежащий минимизации критерий (5) можно переписать в виде

$$\mathfrak{J}_1 = x_0(T) \rightarrow \min_u$$

и система (8) будет иметь вид

$$\begin{cases} dx_0/dt = 1; \\ d\omega_z/dt = (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1 - \rho)) \cdot J_3^{-1}; \\ d\vartheta/dt = \omega_z + v_0. \end{cases} \quad (11)$$

Эта система должна удовлетворять граничным условиям (4) и (9).

Для решения задачи используем принцип максимума Л.С. Понтрягина [4, 5]. Составим функцию Гамильтона:

$$H = \Psi^T f;$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 \\ (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho)) \cdot J_3^{-1} \\ \omega_z + v_0 \end{bmatrix};$$

$$H = \Psi_1 + \Psi_2 \cdot (-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho)) \cdot J_3^{-1} + \Psi_3 \cdot (\omega_z + v_0), \quad (12)$$

где переменные $\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$d\Psi/dt = -\partial H/\partial x; \quad x^T = [x_0, \omega_z, \vartheta];$$

$$\begin{cases} d\Psi_1/dt = -\partial H/\partial x_0 = 0; \\ d\Psi_2/dt = -\partial H/\partial \omega_z = \Psi_2 \cdot k_\omega/J_3 - \Psi_3; \\ d\Psi_3/dt = -\partial H/\partial \vartheta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы (13) имеет вид:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = C_0 = \text{const}; \\ \Psi_2(t) = C_1 \cdot e^{k_\omega t/J_3} + C_2/k_\omega \cdot J_3; \\ \Psi_3(t) = C_2 = \text{const}. \end{cases}$$

Функция Гамильтона достигает максимум при управлении вида

$$\tilde{u} = -\text{sign} \left(C_1 \cdot e^{k_\omega t/J_3} + C_2/k_\omega \cdot J_3 \right) \cdot \alpha. \quad (14)$$

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ является кусочно-постоянной функцией и меняет знак не более одного раза, так как функция $\Psi_2(t)$ имеет не более одного нуля.

Для решения задачи синтеза используем метод фазовых траекторий, при этом решение сводится к определению линии переключения, разделяющей фазовое пространство координат ω_z и ϑ на две области; в одной области оптимальное управление $\tilde{u}(t) = +\alpha$, а в другой $\tilde{u}(t) = -\alpha$. При попадании фазовой траектории на линию переключения знак оптимального управления изменяется на противоположный.

Для построения линии переключения второе уравнение системы (11) поделим на третье уравнение этой системы:

$$d\omega_z/d\vartheta = \frac{(-k_\omega \cdot \omega_z - k_u \cdot u \cdot (1-\rho))}{(J_3(\omega_z + v_0))}$$

и проинтегрируем от ϑ_0 до ϑ_T правую часть и от ω_{z0} до ω_{zT} левую часть:

$$-\int_{\omega_{z0}}^{\omega_{zT}} \frac{J_3 \cdot (\omega_z + v_0)}{k_\omega \cdot \omega_z + k_u \cdot u \cdot (1-\rho)} d\omega_z = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_T} d\vartheta;$$

$$\vartheta_T^r = \vartheta_0 - \frac{J_3}{k_\omega} \cdot (\omega_{zT} - \omega_{z0}) + J_3 \cdot (k_u \cdot u \cdot (1-\rho) - k_\omega \cdot v_0) / k_\omega^2 \cdot \ln \left(\frac{(k_u \cdot u \cdot (1-\rho) + k_\omega \cdot \omega_{zT})}{(k_u \cdot u \cdot (1-\rho) + k_\omega \cdot \omega_{z0})} \right), \quad (15)$$

где ϑ_0 и ω_{z0} точка, в которую должна прийти система на фазовой плоскости; ϑ_T^r – абсцисса на фазовой плоскости, находящаяся на линии переключения; ω_{zT} – текущее значение угловой скорости.

Алгоритм выбора оптимального управления имеет следующий вид:

$$\tilde{u} = \alpha, \text{ если } \begin{cases} \omega_z(t) \geq 0 \text{ и } \vartheta(t) \geq \vartheta_t^r; \\ \omega_z(t) < 0 \text{ и } \vartheta(t) > \vartheta_t^r; \end{cases} \text{ и}$$

$$\tilde{u} = -\alpha, \text{ если } \begin{cases} \omega_z(t) > 0 \text{ и } \vartheta(t) < \vartheta_t^r; \\ \omega_z(t) \leq 0 \text{ и } \vartheta(t) \leq \vartheta_t^r. \end{cases} \quad (16)$$

Построение линии переключения определяет траекторию поводыря.

При управлении с поводырем управление МКА нужно выбирать с использованием алгоритма (16), так как в этом случае траектория МКА будет наискорейшим образом подходить к линии переключения, тогда после попадания на линию переключения, построенную для поводыря, траектория МКА будет колебаться относительно этой линии и отклонение МКА в момент T от заданного значения будет не больше допустимой величины ε , определенной дискретностью выбора управлению.

Рассмотрим результаты моделирования с использованием данного алгоритма.

Исследование проводилось при следующих значениях параметров гипотетического МКА: $m_{ка} = 31,6$ кг – масса космического аппарата; $I_m = 0,195 \cdot 10^{-2}$, $I_z = 0,8953$ кг·м² – моменты инерции маховика и летательного аппарата с учетом момента инерции маховика по оси Oz;

$$v_0 = 0,001 \text{ рад/с}, k_\omega = 0,083, k_u = 1.$$

Моделирование проводилось при различных ρ и ограничениях:

$$|u| \leq \alpha, \alpha = M_{упр_max} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}, |\xi| \leq \beta = k_u \cdot \rho \cdot \alpha.$$

Начальные условия имели следующие значения:

$$t_0 = 0, \omega_z(0) = -0,75 \text{ рад/с}, \vartheta(0) = 0,26 \text{ рад}.$$

Фазовые координаты точки, в которую должна прийти система:

$$\vartheta_0 = 0,22 \text{ рад}, \omega_{z0} = -v_0 = -0,001 \text{ рад/с}.$$

Моделирование процесса происходило до достижения заданной угловой скорости и угла тангажа с допустимым отклонением

$$\varepsilon = \sqrt{(\omega_{зТ} - \omega_z(T))^2 + (\vartheta_3 - \vartheta(T))^2} \leq 10^{-3} \text{ рад/с.}$$

График линий переключения для $\rho = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ представлен на рис. 1.

На рис. 2, 3 представлены графики изменения $\omega_z(t)$ и $\vartheta(t)$, построенные при различных $\rho = 0,3; 0,5; 0,7$. Возмущения задавались в виде случайных функций, распределенных по нормаль-

ному закону с нулевым математическим ожиданием, ограниченных величиной $|\xi| \leq \rho \cdot k_u \cdot \alpha$, при этом величина α была равна максимально возможному значению $\alpha = 20 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Таким образом, величина ξ была ограничена $|\xi| \leq 0,006$ Н·м.

Во всех рассмотренных случаях двигатель-маховик не переходит в режим насыщения.

Результаты моделирования показывают, что по времени переходного процесса при управлении с псевдоуправлением можно оценить влияние возмущений на возможности управления МКА с двигателем-маховиком.

Список литературы

1. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическим летательным аппаратом. М. : Машиностроение, 1964. 404 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М. : Наука, 1981. 288 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М. : Наука, 1969. 384 с.
5. Толпегин О. А. Прикладные методы оптимального управления. Тексты лекций. СПб. : БГТУ «ВОЕНМЕХ», 2004. 215 с.

История статьи

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г.
Принята к публикации 10 июля 2017 г.

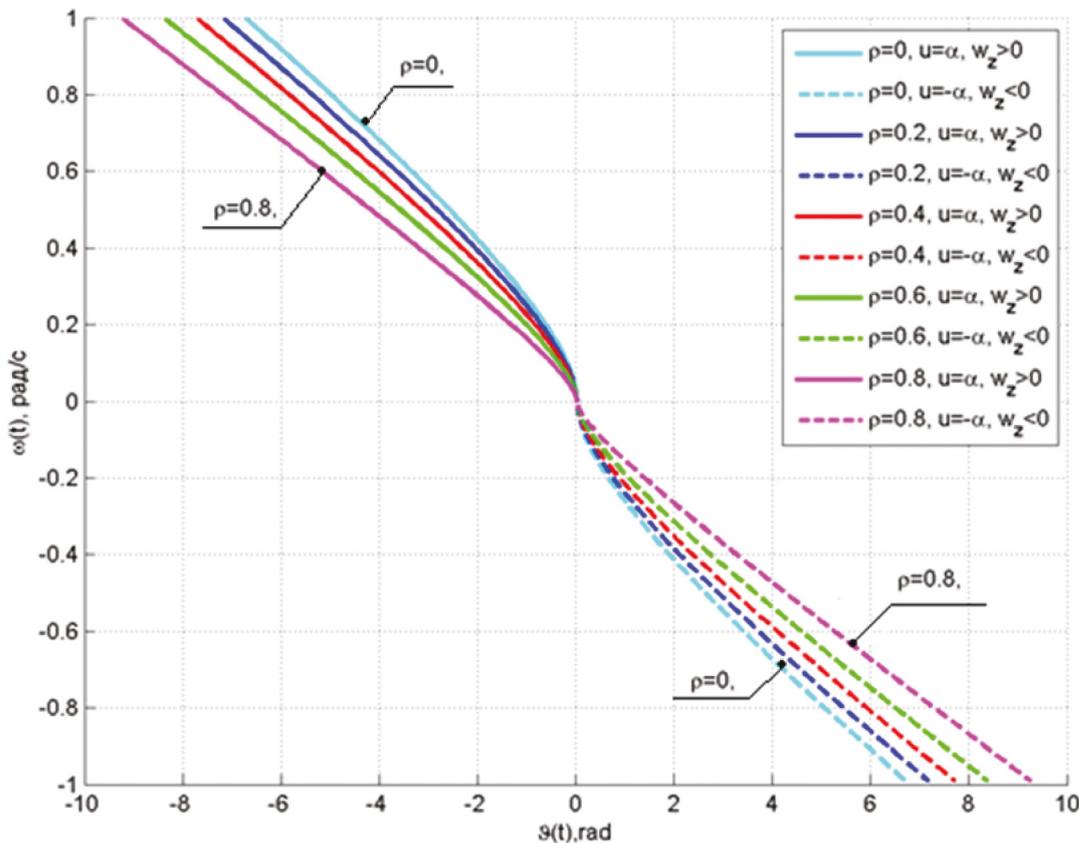


Рис. 1. Испытательный стенд

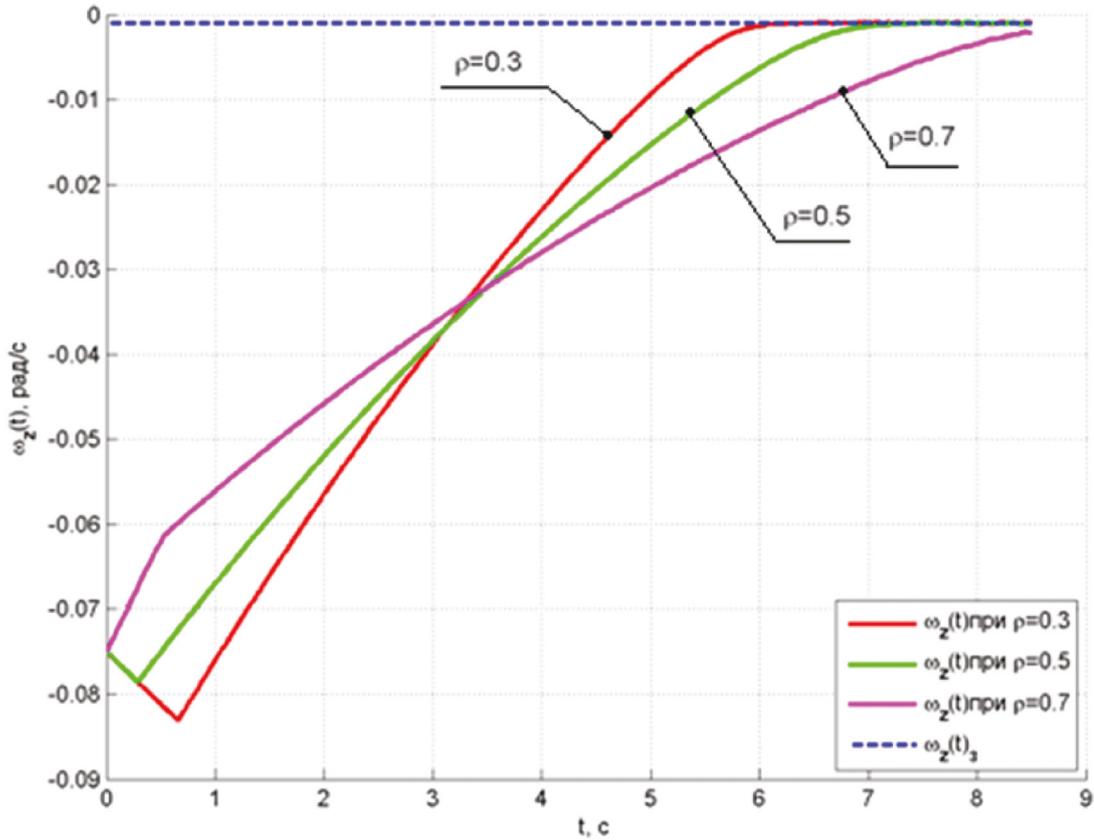


Рис. 2. График переходного процесса $\omega_2(t)$ при различных ρ

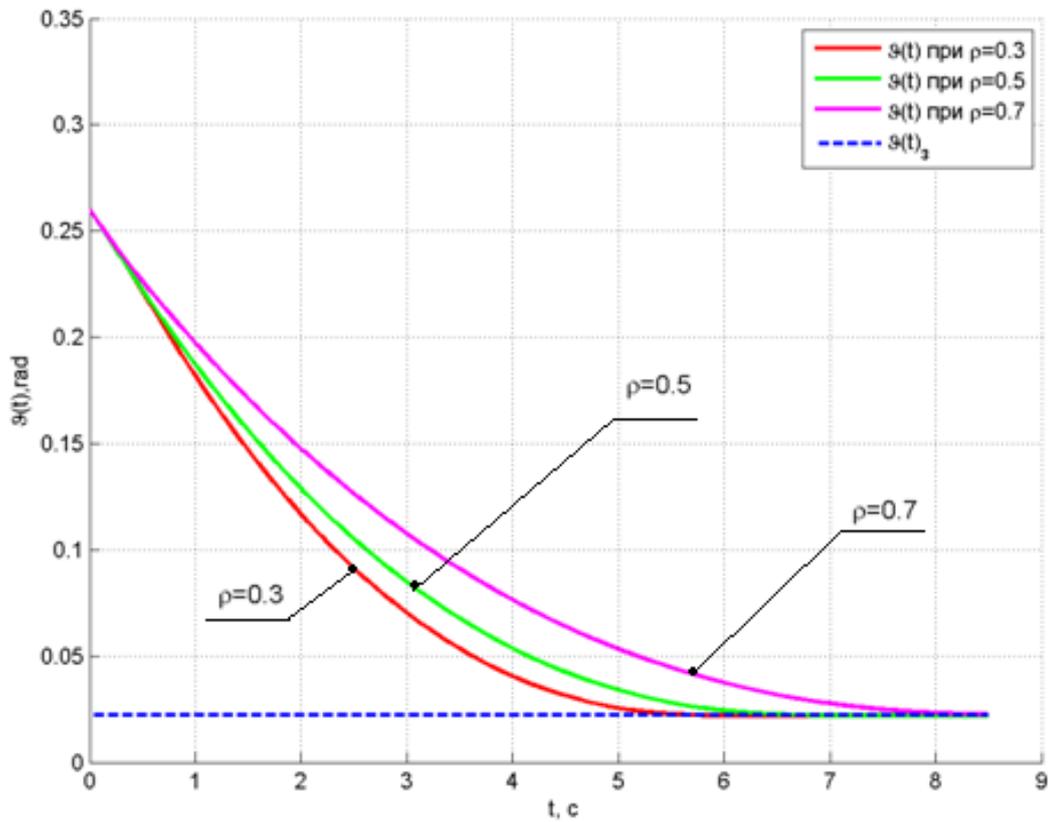


Рис. 3. График переходного процесса $\theta(t)$ при различных ρ

SYNTHESIS OF A SMALL SPACECRAFT'S CONTROL USING A FLYWHEEL ENGINE BASED ON THE CONTROL METHOD WITH A GUIDE

O. A. Tolpegin, P. U. Litvinova

*Baltic State Technical University «VOENMEH» named after D. F. Ustinov,
Saint Petersburg, Russian Federation*

The article is about the control of a small spacecraft using a flywheel engine under the action of perturbations whose statistical properties are unknown but are limited in absolute magnitude. The task is considered as a differential game of two players, the one of them is a single player whose strategy is unknown, there is an outrageous moment, and as another player - a spacecraft whose control it is necessary to select. The peculiarity of the solution lies in the fact that the set of controls of a small spacecraft is divided into two subsets: one subset of controls is used to compensate for perturbations, and the second - to solve the initial problem in the absence of perturbations. The resulting trajectory is called the trajectory of the guide. To divide the set of controls into two is possible in rare cases, therefore in this article a subset of controls is pre-allocated to solve the initial problem in the absence of perturbations, the guide track is constructed, and then, as a result of simulation, an admissible range of perturbations with given statistical properties is determined, under which the solution of the original problem is possible With admissible accuracy. This approach can be used for both linear and nonlinear systems.

In the article, this approach is used to stabilize a small spacecraft by pitch angle. The trajectory of the guide's movement is chosen using the method of phase trajectories. The influence of disturbances is estimated from the time of the transient process. Simulation results illustrating the operability of the proposed approach for estimating the influence of perturbations on the control capabilities of a small spacecraft are presented.

Keywords: small spacecraft, flywheel engine, differential games, control method with guide.

References

1. Alekseev K. B., Bebenin G. G. *Upravlenie kosmicheskimi letatel'nymi apparatami* [Spacecraft control]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1964, 404 p. (In Russian)
2. Krasovskij N. N., Subbotin A. I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian)
3. Subbotin A. I., Chencov A. G. *Optimizaciya garantii v zadachah upravleniya* [Guarantee optimization in control tasks]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p. (In Russian)
4. Pontrjagin L. S., Boltjanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishhenko E. F. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 384 p. (In Russian)
5. Tolpegin O. A. *Prikladnye metody optimal'nogo upravleniya* [Applied methods of optimal control]. Teksty lekcij. Saint-Petersburg, BSTU «VOENMEH» Publ., 2004, 215 p. (In Russian)

Article history

Received 27 June 2017

Accepted 10 July 2017