

## МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СТРЕЛЫ ПРОГИБА КОНСОЛИ В СЛУЧАЕ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Д. М. Зуев<sup>1</sup> ✉, К. Г. Охоткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М. Ф. Решетнёва,  
г. Красноярск, Российская Федерация

<sup>2</sup> АО «Информационные спутниковые системы» им. акад. М. Ф. Решетнёва,  
г. Железногорск, Красноярский край, Российская Федерация

Современные задачи космической отрасли, такие как проектирование крупногабаритных разворачиваемых зонтичных антенных систем, требуют рассмотрения больших изгибов составных элементов – стержней. Развитие современных аналитических методов механики деформируемого твердого тела позволяют моделировать формы изгиба гибких криволинейных стержней, находить выражения для их прогибов. Использование аналитических методов позволяет находить полную систему ветвей решений нелинейных краевых задач и все формы равновесных состояний стержней, избегая значительных временных затрат на численное моделирование. При этом для практики важны относительно простые методы определения форм больших криволинейных изгибов стержня, пригодные для инженерного применения на этапе эскизного проектирования составных стержневых конструкций. В статье предложен метод получения модифицированных аналитических выражений для определения больших прогибов упругого стержня – консоли, нагруженной поперечной сосредоточенной силой. Предложенный метод использует важное для практики условие сохранения криволинейной длины стержня при изгибе. Модифицированные выражения позволяют достичь точности, сравнимой с точными нелинейными решениями, записанными в эллиптических интегралах и функциях, что многократно расширяет интервал нагрузок применимости линейной теории. Рассмотрены случаи поперечной нагрузки на свободном конце, комбинированной нагрузки: равномерно распределенной по всей длине стержня и поперечной сосредоточенной нагрузки. Проведено сравнение с экспериментальными данными, которое подтвердило точность предложенного метода. На основе модифицированных выражений были получены приближенные формулы, пригодные для инженерного применения.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность, большие деформации, консоль, эластика Эйлера.

### Введение

Проблемы определения больших деформаций тонких упругих криволинейных стержней являются важными для космической отрасли в связи с проектированием разворачиваемых антенн большого диаметра, которые должны быть компактны в транспортировочном положении [1]. Мировой тренд миниатюризации космических платформ ставит задачи проектирования разворачиваемых гибких и упругих стержневых трансформируемых конструкций с учетом ограничений в габаритах [2]. Методы решения данных проблем мо-

гут использоваться для разработки «податливых» механизмов (compliant mechanisms) [3], которые находят широкое применение в космической индустрии [4].

Родоначальником проблемы определения формы изгиба нагруженных стержней является Галилей, который рассмотрел две проблемы изгиба консоли в 1638 году [5]. Значительное развитие проблемы решения задач об изгибе тонкого криволинейного стержня получили в работах Эйлера и других ученых в период с XIX века по наши дни [6–9], в которых решения традиционно записывались с помощью различных комбинаций эластик Эйлера.

В классической механике деформируемого твердого тела для решения статической задачи об

✉ zuevdmityy93@yandex.ru

изгибе тонкого упругого стержня требуется решить уравнение Эйлера-Бернулли:

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (1)$$

где  $M$  – изгибающий момент,  $EJ$  – жесткость стержня,  $\Theta$  – угол наклона касательной к стержню в точке  $s$ . Данное уравнение может быть записано в декартовых координатах:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2)$$

Решение уравнений (1) и (2) является весьма нетривиальной математической задачей, которая приводит к получению точных аналитических решений, использующих аппарат эллиптических интегралов и функций. Примерами таких решений могут служить работы [7–10]. Существуют различного рода приближенные решения: получаемые путем степенных разложений, записанных либо с помощью эллиптических функций точного геометрически нелинейного решения задачи поперечного изгиба консоли, либо путем аппроксимации такого точного решения [11]. Другие возможные пути получения приближенного решения – степенные разложения уравнений (1) и (2), приведенные в работе [12].

Также существует линейризованная теория, которая лежит в основе теории сопротивления материалов. В ней используется линейризованное уравнение (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (3)$$

Уравнение (3) было получено из (2) из соображений, что при малых прогибах  $dy/dx \approx 0$ , и, следовательно,  $\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \approx 1$  [13].

Таким образом, выделяют два подхода к исследованию деформаций стержня: подход больших деформаций изгиба, где прогиб сравним с длиной стержня, и малых деформаций, где возможно использовать классическую линейризованную теорию [14]. Считается, что область применимости геометрически линейной теории находится в пределах 3–5 % отношения прогиба к длине стержня [15].

## 1. Описание предложенного метода

Для получения решения задачи изгиба геометрически нелинейного стержня уравнение (1) обычно сводится к уравнению нелинейного маятника [8]. Точное решение уравнения нелинейного

маятника записывается с помощью эллиптических функций. Прикладное использование точных решений в эллиптических функциях требует использования сложного математического аппарата специальных функций.

В данной работе предложено упрощенное для практики решение – получение модифицированных аналитических выражений, которые получаются путем решения линейризованного уравнения (3) [16]. Это позволит получить достаточно точное решение, не прибегая к использованию эллиптических функций.

Предложим обобщенный аналитический метод для получения ряда модифицированных выражений для стрелы прогиба тонкого упругого стержня – консоли, находящейся под действием поперечной сосредоточенной силы на свободном конце (рис. 1). Этот метод позволяет существенно уточнять известные выражения геометрически линейной теории и определять стрелу прогиба криволинейного стержня, подверженного большим деформациям изгиба.

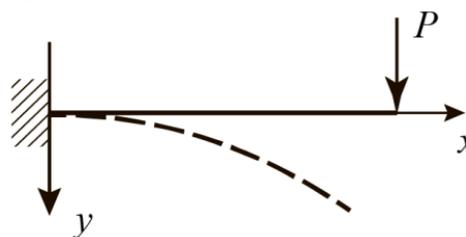


Рис. 1. Консоль под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на свободном конце

В классической теории сопротивления материалов для данного случая требуется решить уравнение (3) со следующими граничными условиями (стержень заземлен на правом конце)  $y(L) = 0$ ,  $y'(L) = 0$ , где  $L$  – длина консоли. Действующий момент в данном случае выглядит как:  $M(x) = Px$ , где  $P$  – действующая сила. Форма изгиба в безразмерных координатах представляется формулой:

$$\eta = \eta(\xi, \mu) = \frac{\mu}{3} (2 - 3\xi + \xi^3), \quad (4)$$

где  $\eta = y/L$  и  $\xi = x/L$  – безразмерные ордината и абсцисса соответственно;  $\mu = PL^2/2EJ$  – безразмерный параметр нагрузки. Параметр  $\mu$  может быть выражен в единицах сил Эйлера  $\lambda = P/P_c$ , где  $P_c = (\pi/2)^2 EJ/L^2$  – эйлерова сила. Связь параметров  $\mu$  и  $\lambda$  выглядит следующим образом:  $\mu = \pi^2 \lambda/8$  ( $\approx 1,23 \lambda$ ).

Стрела прогиба ( $f = \eta$  при  $x = 0$ ) определяется в точке пересечения оси ординат линией изогнутого стержня (рис. 2):

$$f = f(\mu) = \eta(0, \mu) = \frac{2}{3} \mu. \quad (5)$$

В случае малых отклонений конца стержня от положения равновесия возможно не учитывать

изменение криволинейной длины стержня при его изгибе. В данном случае можно говорить о допущении сохранения проекции длины стержня. Однако в случае больших нагрузок отклонение стержня от оси ординат будет резко увеличиваться. И в этом случае выражение (5) для определения стрелы прогиба будет давать неверные результаты. Для получения точных выражений необходимо ввести условие нерастяжимости стержня, т. е. сохранение его криволинейной длины и отслеживать прогиб в конечной точке стержня. В общем виде данный метод определения стрелы прогиба можно записать в следующем виде:

$$f = \eta(\xi_k, \mu), \quad (6)$$

где  $\eta$  – функция прогиба левого конца стержня;  $\xi_k$  – абсцисса левого конца стержня. Параметр  $\xi_k$  вычисляется из условия сохранения криволинейной длины в безразмерных координатах:

$$\int_{\xi_k}^1 \left\{ 1 + \left[ \frac{d\eta(\xi, \mu)}{d\xi} \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi = 1. \quad (7)$$

Корень уравнения (7) может быть найден путем численного решения, например, методом бисекции.

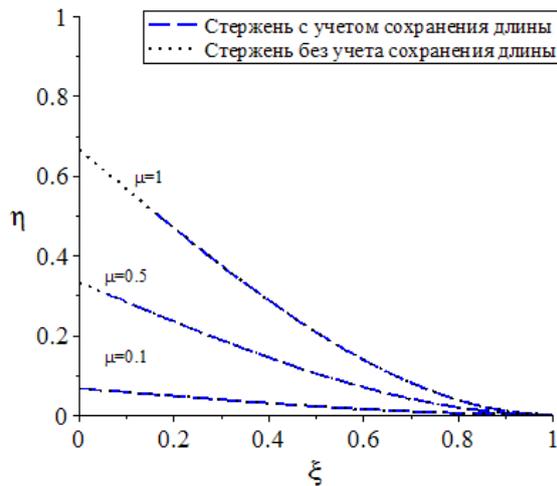


Рис. 2. Формы изгиба стержня с учетом сохранения длины и без учета сохранения длины

Для случая поперечной сосредоточенной нагрузки на свободном конце формулы (6) и (7) запишутся следующим образом:

$$f = \eta(\xi_k, \mu) = \frac{\mu}{3} (2 - 3\xi_k + \xi_k^3), \quad (8)$$

$$\int_{\xi_k}^1 \sqrt{1 + \mu^2 (z^2 - 1)^2} dz = 1. \quad (9)$$

Построим стрелу прогиба модифицированной линейной теории в сравнении с геометрически линейным решением и с точным решением, записанным в эллиптических функциях из работы [10] (рис. 3).

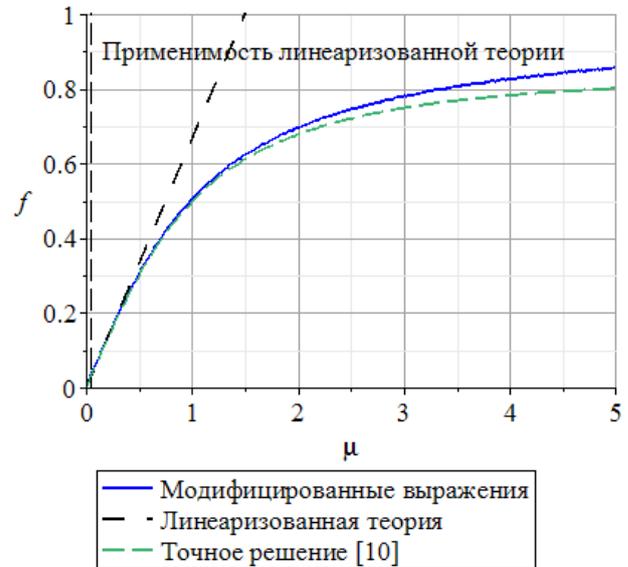


Рис. 3. Стрела прогиба модифицированной линейной теории в сравнении с точным нелинейным решением [10] и с геометрически линейной теорией

На рис. 3 видно, что все три решения совпадают в области применимости классической линейной теории, которая составляет около  $0 < \mu < 0,05$ . Мы видим, что модифицированное линейное решение показывает хорошую степень совпадения с точным решением на интервале сил, значительно превосходящем область применения классической линейной теории.

Отдельно отметим, что все решения, приведенные в настоящей статье, не имеют точек перегиба и справедливы только для первой ветви (моды) нелинейного решения задачи поперечного изгиба заземленной консоли. Кроме первой ветви, существуют и другие, более высокие формы изгиба стержня, с точками перегиба, описываемые точными нелинейными решениями в эллиптических функциях [8].

## 2. Экспериментальная проверка

Для проверки предложенного метода было проведено сравнение с экспериментальными данными, приведенными в работе [17]. В данной работе проведен демонстрационный изгиб тонкой упругой стальной консоли под воздействием поперечной нагрузки на конце и распределенной нагрузки по всей длине (собственный вес). Схема нагружения приведена на рис. 4. Длина консоли  $L = 0,4$  м, поперечное сечение прямоугольное шириной  $b = 0,025$  м и высотой  $h = 0,0004$  м. Вес консоли и значение равномерно распределенной нагрузки  $W = 0,3032$  Н и  $w = W/L = 0,758$  Н/м соответственно [17].

Предложенный метод был обобщен на случай комбинированной нагрузки: поперечной сосредоточенной силы на свободном конце и равно-

мерно распределенной нагрузки. В этом случае изгибающий момент выглядит следующим образом:

$$M(x) = Px + \frac{1}{2} wx^2. \quad (10)$$

Форма изгиба:

$$\eta = \frac{L^2}{24EJ} \cdot [W\xi^4 + 4P\xi^3 - (12P + 4W)\xi + 8P + 3W]. \quad (11)$$

После дифференцирования (11) и подстановки в (7) мы получим следующее уравнение для параметра  $\xi_k$ :

$$\int_{\xi_k}^1 \left\{ 1 + \frac{L^4}{36(EJ)^2} [3P(\xi^2 - 1) + W(\xi^3 - 1)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\xi = 1.$$

Стрела прогиба для консоли под действием комбинированной нагрузки для модифицированной линейной теории в сравнении с экспериментальными данными приведена на рис. 5.

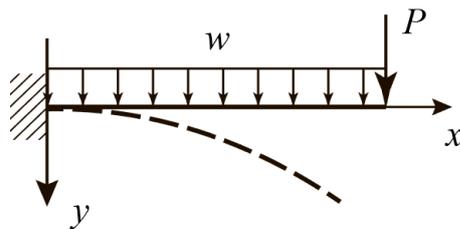


Рис. 4. Схема нагружения консоли комбинированной нагрузкой (сосредоточенной и распределенной)

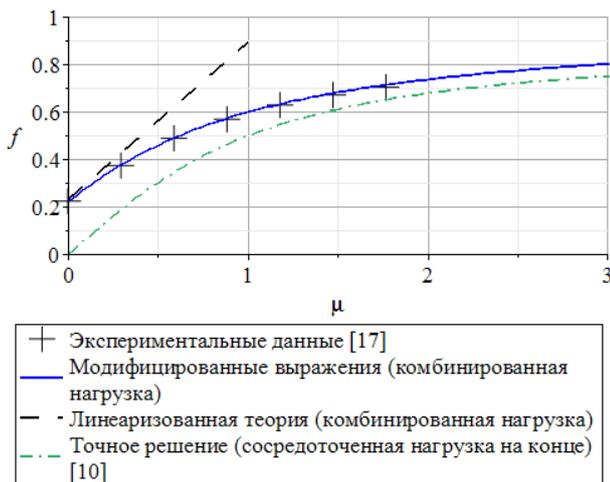


Рис. 5. Сравнение стрелы прогиба консоли с экспериментальными данными в случае комбинированной нагрузки

Как мы можем видеть на рис. 5, стрела прогиба модифицированной линейной теории для рассматриваемого случая нагружения находится в полном согласии с экспериментальными данными на всем интервале нагрузок  $0 < \mu < 1,75$  (или в безразмерных эйлеровых силах  $0 < \lambda < 1,4$ ).

### 3. Приближенные формулы

Для применения в инженерных целях удобны приближенные формулы, выраженные в виде степенных полиномов. Использование таких приближенных формул позволяет избежать численных расчетов, решений уравнений и других операций. На основе предложенного метода модификации линейной теории были получены приближенные выражения для различных интервалов нагрузок [18].

С помощью разложения подынтегрального выражения в (9) в ряд Тейлора и последующего интегрирования были получены следующие уравнения для нахождения  $\xi_k$ :

$$\sqrt{1 + \mu^2} - \frac{\mu^2}{3\sqrt{1 + \mu^2}} - \sqrt{1 + \mu^2} \xi_k + \frac{\mu^2}{3\sqrt{1 + \mu^2}} \xi_k^3 = 1, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \mu^2 \xi_k^4 - \frac{4}{3} \mu^2 \xi_k^3 + \mu^2 \xi_k^2 + \xi_k - \frac{1}{6} \mu^2 = 0. \quad (13)$$

Выражение (12) было получено путем разложения подынтегрального выражения в (9) в окрестности точки  $z = 0$  до второй степени  $\xi_k$ . Выражение (13) было получено таким же путем, но разложение осуществлялось в окрестности  $z = 1$  до третьей степени  $\xi_k$ .

Выражения (12) и (13) являются алгебраическими уравнениями, которые можно решить численными методами, а потом использовать полученное значение  $\xi_k$  в формуле для стрелы прогиба (8).

Можно воспользоваться тем, что  $\xi_k$  является малым параметром. Таким образом, в выражениях (12) и (13) можно пренебречь степенями  $\xi_k$  выше второй и решить квадратное уравнение. Далее получим следующие аналитические выражения для  $\xi_k$ :

$$\xi_k = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{\mu^4} + \frac{2}{3}} - \frac{1}{\mu^2} \right), \quad (14)$$

$$\xi_k = \frac{1}{6} \mu^2, \quad (15)$$

$$\xi_k = \frac{1 + \frac{2}{3} \mu^2 - \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2}. \quad (16)$$

Выражения (14) и (15) были получены из (12), (16) было получено из (13). Приближенные решения для стрелы прогиба в полной записи выглядят следующим образом:

$$f = \eta(\xi_k, \mu) = \frac{\mu}{3} (2 - 3\xi_k + \xi_k^3), \quad (17)$$

$$\xi_k = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{\mu^4} + \frac{2}{3}} - \frac{1}{\mu^2} \right).$$

$$f = \eta(\xi_k, \mu) = \frac{\mu}{3}(2 - 3\xi_k + \xi_k^3), \quad \xi_k = \frac{1}{6}\mu^2. \quad (18)$$

$$f = \eta(\xi_k, \mu) = \frac{\mu}{3}(2 - 3\xi_k + \xi_k^3),$$

$$\xi_k = \frac{1 + \frac{2}{3}\mu^2 - \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2}. \quad (19)$$

Построим стрелы прогибов полученных приближенных формул в сравнении с исходным линейным выражением (рис. 6). Для сравнения добавим приближенное решение из [11], получен-

ное путем степенных разложений точного решения [10]:

$$f = 1 - \sqrt{1 - \pi^2 \lambda / 32} \cdot [1 - 13(\pi^2 \lambda - \pi^4 \lambda^2 / 32) / 192]. \quad (20)$$

Видно, что полученные приближенные формулы обладают хорошей степенью согласованности с исходным выражением. Стрелы прогиба на рис. 6, построенные по полученным новым модифицированным выражениям, хорошо согласуются с приближенным решением (20) из работы [11], которое было получено на основе точного решения. По данному графику оценим интервалы применимости приближенных формул (табл.).

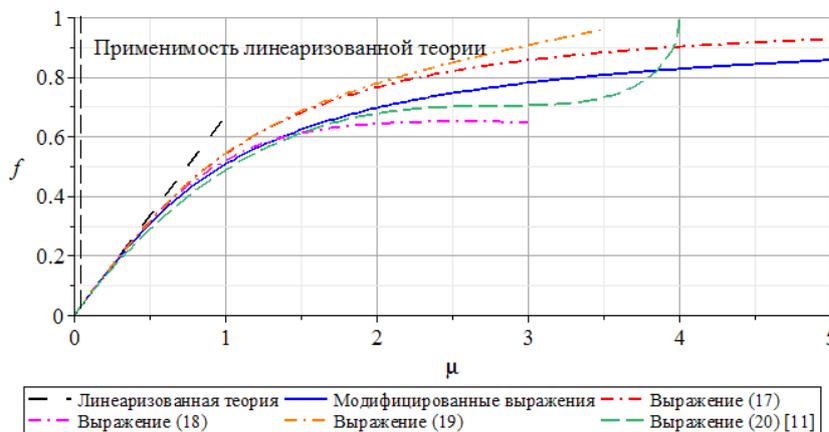


Рис. 6. Стрелы прогибов полученных приближенных выражений в сравнении с исходным выражением

Таблица

Интервалы применимости приближенных формул

Выражение	Интервал нагрузок применимости		Максимальное отклонение от исходного выражения
	В единицах $\mu$	В единицах $\lambda$	
(17)	$0 < \mu < 5,0$	$0 < \lambda < 4,1$	10 %
(18)	$0 < \mu < 1,5$	$0 < \lambda < 1,2$	5 %
	$0 < \mu < 2,0$	$0 < \lambda < 1,6$	10 %
(19)	$0 < \mu < 2,0$	$0 < \lambda < 1,6$	10 %
	$0 < \mu < 3,5$	$0 < \lambda < 2,9$	20 %

## Заключение

В статье предложен аналитический метод для получения модифицированных выражений, описывающих стрелу прогиба консольного стержня под действием поперечной нагрузки. Проведено сравнение с экспериментальными данными, подтвердившее применимость данного

метода на интервале значительно большем, чем у исходных классических выражений линейной теории сопротивления материалов. На основе предложенной модификации были получены новые простые приближенные аналитические выражения, удобные для инженерных приложений при предварительных оценочных расчетах деформирования упругих стержней.

## Список литературы

- [1] Лопатин А. В., Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Вильянен В. В., Пашковский А. В. Геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибкими композитными элементами //

- Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. 2012. № 5 (45). С. 75–80.
- [2] Sato Yu., Kim S., Kusakawa Y., Shimizu K., Tanaka T., Komatsu M., Lambert C., Nakasuka S. Extensible Flexible Optical System for Nano-scale Remote Sensing Satellite «PRISM» // Transaction. of Japan Soc. for Aero. and Space Sciences, Space Tech, 2009, vol. 7, pp. 13–18. doi: 10.2322/tstj.7.Tm\_13
- [3] Howell L. L. Compliant Mechanisms // 21st Century Kinematics. London, Springer, 2013, pp. 189–216. doi: 10.1007/978-94-017-9780-1\_302
- [4] Fowler R. M., Howell L. L., Magleby S. P. Compliant space mechanisms: A new frontier for compliant mechanisms // Mech. Sci., 2011, vol. 2, no. 2, pp. 205–215. doi: 10.5194/ms-2-205-2011
- [5] Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки // Галилео Галилей. Избранные труды. М. : Наука, 1964. С. 109–410.
- [6] Goss V. G. A. The History of the Planar Elastica: Insights into Mechanics and Scientific Method // Sci & Educ, 2009, vol. 18, no. 8, pp. 1057–1082.
- [7] Batista M. Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions // Int. J. Solids Struct., 2014, vol. 51, no. 13, pp. 2308–2326. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.02.036
- [8] Захаров Ю. В., Охоткин К. Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.
- [9] Scarpello G. M., Ritelli D. Exact Solutions of Nonlinear Equation of Rod Deflections Involving the Lauricella Hypergeometric Functions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, vol. 2011, Article ID 838924. doi: 10.1155/2011/838924
- [10] Захаров Ю. В., Захаренко А. А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 48–54.
- [11] Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Власов А. Ю. Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 132–134.
- [12] Ang M. H. J., Wei W., Teck-Seng L. On the estimation of the large deflection of a cantilever beam // Proc. IECON '93 – 19th Annu. Conf. IEEE Ind. Electron, 1993, pp. 1604–1609. doi: 10.1109/IECON.1993.339311
- [13] Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. : Лань, 2002. 672 с.
- [14] Анфиловьев А. В. Теория «малых» и «больших» искривлений стержней в общем аналитическом представлении // Известия Томского политехнического университета. 2007. Т. 310. № 2. С. 55–59.
- [15] Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А. А. Соппротивление материалов с основами теории упругости теории и пластичности. М. : АСВ, 1995. 572 с.
- [16] Зуев Д. М., Захаров Ю. В. Стрела прогиба консоли сосредоточенной поперечной силой. Модификация линейной теории // Решетневские чтения : материалы XX Междунар. науч.-практ. конф. Красноярск. 2016. Ч. 2. С. 131–133.
- [17] Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: A Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics of Materials // Int. J. Eng. Educ., 2003, vol. 19, no. 6, pp. 885–892.
- [18] Зуев Д. М. Стрела прогиба консоли под действием поперечной сосредоточенной нагрузки. Приближенные формулы для модификации линейной теории // Актуальные проблемы авиации и космонавтики : сб. материалов XIV Междунар. науч.-практ. конф., посвященной Дню космонавтики: в 3 т. 2018. Т. 1. С. 294–296.

## MODIFIED FORMULAS FOR MAXIMUM DEFLECTION OF A CANTILEVER UNDER TRANSVERSE LOADING

**D. M. Zuev<sup>1</sup>, K. G. Okhotkin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,  
Krasnoyarsk, Russian Federation

<sup>2</sup> JSC Academician M. F. Reshetnev Information Satellite Systems,  
Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, Russian Federation

*Modern problems of aerospace industry require consideration of rods experiencing large deflections. The example of such a problem is development of large scale deployable umbrella-*

type antennas where rods are structural elements. Development of modern analytic methods in the field of solid mechanics allows to model rod bend shapes and to find expressions for maximum deflection. In addition, the analytic methods make it possible to find a full system of solution branches and all possible equilibrium shapes without significant time-consuming for numerical simulations. Wherein relatively simple methods for determining bending shapes in case of large deflections have significant importance for applied use. Namely, they can be used for preliminary design of complex rod constructions. The paper presents the method for obtaining of modified analytic formulas that enable to determine large deflections of a thin elastic cantilever under transverse loading. The method uses a rod's arc-length saving condition which is important for applied use. The modified formulas allow to achieve accuracy comparable with exact nonlinear solutions given in terms of elliptic integrals and functions. That fact expands the loading range where the linear theory can be used. The authors considered the following cases: concentrated transverse loading on the free end and combined loading (uniformly distributed loading and concentrated transverse loading on the free end). The comparison with experimental data proved accuracy of the proposed method. In addition, the authors obtained approximate formulas based on the modified formulas. The approximate formulas can be use for engineering applications.

*Keywords: geometrical nonlinearity, large deformations, cantilever, Euler elastic.*

## References

- [1] Lopatin A. V., Zakharov Yu. V., Okhotkin K. G., Vil'yanen V. V., Pashkovskiy A. V. *Geometricheski nelineynaya model' transformiruемого oboda bol'shoy kosmicheskoy anteny s gibkimi kompozitnymi elementami* [Geometrically nonlinear model of transformable rim of large space antenna with flexible composite elements] // Vestnik SibGAU, 2012, vol. 5, no. 45, pp. 75–80. (In Russian)
- [2] Sato Yu., Kim S., Kusakawa Y., Shimizu K., Tanaka T., Komatsu M., Lambert C., Nakasuka S. Extensible Flexible Optical System for Nano-scale Remote Sensing Satellite «PRISM» // Transaction. of Japan Soc. for Aero. and Space Sciences, Space Tech, 2009, vol. 7, pp. 13–18. doi: 10.2322/tstj.7.Tm\_13
- [3] Howell L. L. *Compliant Mechanisms* // 21st Century Kinematics. London, Springer, 2013, pp. 189–216. doi: 10.1007/978-94-017-9780-1\_302
- [4] Fowler R. M., Howell L. L., Magleby S. P. Compliant space mechanisms: A new frontier for compliant mechanisms // Mech. Sci., 2011, vol. 2, no. 2, pp. 205–215. doi: 10.5194/ms-2-205-2011
- [5] *Galileo Galilej. Besedy i matematicheskie dokazatel'stva, kasayushchiesya dvukh novykh otrasley nauki* [Galileo Galilei. The Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences] // Galileo Galilei. Izbrannyye trudy, Moscow, Nauka, 1964. pp. 109–410. (In Russian)
- [6] Goss V. G. A. *The History of the Planar Elastica: Insights into Mechanics and Scientific Method* // Sci & Educ., 2009, vol. 18, no. 8, pp. 1057–1082.
- [7] Batista M. Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions // Int. J. Solids Struct., 2014, vol. 51, no. 13, pp. 2308–2326. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.02.036
- [8] Zakharov Yu. V., Okhotkin K. G. *Nelineynyy izgib tonkih uprugih sterzhney* [Nonlinear bending of thin elastic rods] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2002, vol. 43, no. 5, pp. 739–744. (In Russian)
- [9] Scarpello G. M., Ritelli D. Exact Solutions of Nonlinear Equation of Rod Deflections Involving the Lauricella Hypergeometric Functions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, vol. 2011, Article ID 838924. doi: 10.1155/2011/838924
- [10] Zakharov Yu. V., Zakharenko A. A. *Dinamicheskaja poterja ustojchivosti v nelineynoj zadache o konsoli* [Dynamic instability at a nonlinear problem of a cantilever] // Computational technologies, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 48–54. (In Russian)
- [11] Zakharov Yu. V., Okhotkin K. G., Vlasov A. Yu. *Priblizhennyye formuly dlya strely progiba uprugogo sterzhnya pri poperechnom nagruzhenii* [Approximate formulas for sagging deflection of an elastic rod under transverse loading] // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2002, vol. 43, no. 5, pp. 745–747. (In Russian)
- [12] Ang M. H. J., Wei W., Teck-Seng L. On the estimation of the large deflection of a cantilever beam // Proc. IECON '93 – 19th Annu. Conf. IEEE Ind. Electron, 1993, pp. 1604–1609. doi: 10.1109/IECON.1993.339311
- [13] Timoshenko S. P., Gere G. *Mechanica materialov* [Mechanics of materials]. Moscow, Lan', 2002. 627 p. (In Russian)
- [14] Anfilov'ev A. V. *Teoriya «malykh» i «bol'shikh» iskrivleniy sterzhney v obshchem analiticheskom predstavlenii* [Theory of small and large deflections in general analytic representation] // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2007, vol. 310, no. 2, pp 55–59. (In Russian)

- [15] Vardanyan G. S., Andreev V. I., Atarov N. M., Gorshkov A. A. *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti teorii i plastichnosti* [Strength of materials with fundametnals of elasticity and plasticity theory]. Moscow, ACB, 1995, 572 p. (In Russian)
- [16] Zuev D. M., Zakharov Yu. V. *Strela progiba konsoli sosredotochennoj poperechnoj siloj. Modifikaciya linejnoy teorii* [Sagging deflection of cantilever loaded with a transversal load. Modification of linear theory] // Reshetnev readings : materials of the XX International scientific-practical conference, Krasnoyarsk, 2016, vol. 2, pp. 131–133. (In Russian)
- [17] Beléndez T., Neipp C., Beléndez A., Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: A Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics of Materials // Int. J. Eng. Educ., 2003, vol. 19, no. 6, pp. 885–892.
- [18] Zuev D. M. *Strela progiba konsoli pod dejstviem poperechnoj sosredotochennoj nagruzki. Priblizhennye formuly dlya modifikacii linejnoy teorii* [Sagging deflection of cantilever loaded with a transversal load. Approximate formulas for modification of linear theory] // Proc. of Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики, Krasnoyarsk, 2018, vol. 1, pp. 294–296. (In Russian)

### Сведения об авторах

*Зувев Дмитрий Михайлович* – аспирант кафедры технической физики Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва. Окончил СибГУ им. М. Ф. Решетнёва в 2017 году. Область научных интересов: механика упругого деформируемого тела, малые космические аппараты.

*Охоткин Кирилл Германович* – доктор физико-математических наук, доцент, заместитель генерального директора по науке АО «Информационные спутниковые системы» им. акад. М. Ф. Решетнёва». Окончил Сибирскую аэрокосмическую академию им. акад. М. Ф. Решетнёва в 1999 году. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, математическая физика.