

# ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ВЫВЕДЕНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ FALCON-9

Паинг Сое Ту У

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается комбинированная схема перелета, в рамках которой ракета-носитель Falcon 9 выводит космический аппарат на эллиптическую промежуточную орбиту с космодрома на мысе Канаверал. В процессе проведения анализа задачи фиксируется значение высоты перигея и наклонение промежуточной орбиты, а высота апогея промежуточной орбиты варьируется. После отделения от последней ступени ракеты-носителя космический аппарат осуществляет перелет на геостационарную орбиту с использованием электроракетной двигательной установки. На этапе выведения космического аппарата с промежуточной орбиты на геостационарную орбиту с использованием электроракетной двигательной установки рассматривается задача минимизации массы рабочего топлива многовиткового межорбитального перелета. Число витков и высота апогея промежуточной орбиты варьируются с целью анализа влияния этих параметров на длительность перелета и доставляемую массу космического аппарата на геостационарную орбиту. Основной целью данной работы является вычисление оптимальных значений высоты апогея промежуточной орбиты и оптимальных значений числа витков, обеспечивающих за заданное время  $\Delta t^*$  доставку максимальной массы космического аппарата на геостационарную орбиту. Для решения задачи оптимизации применяется принцип максимума Понтрягина. После применения принципа максимума задача оптимизации сводится к решению краевой задачи, которая решается методом продолжения по параметру. В работе приводятся результаты задачи оптимизации многовиткового межорбитального перелета и анализ энергетических характеристик комбинированной схемы выведения космического аппарата на геостационарную орбиту.

**Ключевые слова:** ограниченная мощность, ограниченная тяга, вспомогательная долгота, принцип максимума Понтрягина, метод продолжения по параметру.

## Введение

Использование электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) в качестве маршевых двигателей при реализации космических миссий обеспечивает существенно меньший расход рабочего тела по сравнению с использованием двигателей большой тяги на химическом топливе и, соответственно, доставку на целевую орбиту космического аппарата (КА) большей массы. При этом следует учесть, что применение ЭРДУ приводит к увеличению времени перелета. В данной работе при решении оптимизационной задачи вывода КА на геостационарную орбиту (ГСО) с помощью ЭРДУ

в качестве критерия оптимальности рассматривается конечная масса КА и время перелета на ГСО. Для реализации компромисса между конечной массой КА и длительностью перелета предлагается использовать комбинированную схему перелета на ГСО. Рассматривается схема выведения КА на ГСО с использованием некоторой промежуточной орбиты, имеющей форму эллипса. Для выведения КА на промежуточную орбиту используется ракета-носитель (РН) Falcon 9.

В настоящей работе для решения оптимизационной задачи применяется принцип максимума Понтрягина [2]. Описание деталей используемого подхода представлено в работах [3–9]. Принцип максимума сводит задачу оптимизации к двухточечной краевой задаче. Для решения краевой задачи применяется метод продолжения по пара-

✉ paingsoethuoo53@gmail.com

© Ассоциация «ТП «НИСС», 2023

метру [3–9]. Для упрощения выбора начального приближения при решении поставленной задачи используется подход, основанный на последовательном получении сначала траектории ограниченной мощности (ОМ) [3; 7] и, после этого, ограниченной тяги (ОТ) [4–6; 8; 9]. При этом начальные значения неизвестных сопряженных переменных, полученные на этапе решения ОМ задачи, используются для начального приближения при решении ОТ задачи [4–6; 8; 9].

### 1. Математическая модель движения космического аппарата с использованием вспомогательной долготы в качестве независимой переменной

Рассматривается задача оптимизации ОТ траектории. Гравитационное поле предполагается центральным ньютоновским. В данной работе используются дифференциальные уравнения движения в равноденственных элементах [1]. В качестве независимой переменной интегрирования используется вспомогательная долгота  $K$ , которая применялась в качестве независимой переменной в работах [7–9]. Уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t; \\ \frac{de_x}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \cdot \left[ \sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right]; \\ \frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \cdot \left[ -\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right]; \\ \frac{di_x}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n; \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n; \\ \frac{dL_K}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n; \quad \frac{dm}{dK} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 \frac{T}{c}; \\ \frac{dt}{dK} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

при этом:

$$\begin{aligned} s^2 &= 1 + i_x^2 + i_y^2; \\ q &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L; \\ \xi &= i_x \sin L - i_y \cos L. \end{aligned}$$

В (1) используются следующие обозначения:  $p$  – фокальный параметр;  $e = [e_x, e_y]$  – экс-

центриситет;  $e_x = e \cdot \cos(\omega + \Omega)$ ;  $e_y = e \cdot \sin(\omega + \Omega)$ ;  $L = \nu + \omega + \Omega$  – истинная долгота;  $\omega$  – аргумент перигея;  $\Omega$  – долгота восходящего узла;  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;  $i = [i_x, i_y]$  – наклонение;  $i_x = \text{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$ ;  $i_y = \text{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$ ;  $a = [a_r, a_t, a_n]$  – ускорение КА;  $a_r, a_t, a_n$  – радиальная, тангенциальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения соответственно, которые определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_t &= \delta \frac{T}{m} \cos \vartheta \cos \psi; \\ a_r &= \delta \frac{T}{m} \sin \vartheta \cos \psi; \\ a_n &= \delta \frac{T}{m} \sin \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vartheta, \psi$  – углы тангажа и рысканья соответственно;  $T$  – тяга ЭРДУ КА;  $c$  – скорость истечения ЭРДУ;  $\delta$  – функция включения-выключения двигательной установки КА ( $\delta = 1$  – двигатель включен,  $\delta = 0$  – двигатель выключен);  $m$  – масса КА;  $t$  – время. Результатом решения оптимизационной задачи является определение оптимальной программы управления вектором тяги КА – ориентация вектора тяги в пространстве и время включения-выключения двигателей [8; 9].

### 2. Решение краевой задачи методом продолжения

Принцип максимума [2; 8] сводит задачу оптимизации к краевой. В данном случае мы получаем двухточечную краевую задачу. При этом граничными условиями будут являться начальные и конечные значения наклонения  $i$ , эксцентриситета  $e$ , фокального параметра  $p$ , отклонения истинной долготы от вспомогательной  $L_K$ . Неизвестными параметрами при решении краевой задачи являются 7 начальных значений сопряженных переменных ( $p_p, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{L_K}$ ). Последним, седьмым, граничным условием является условие трансверсальности для конечного значения сопряженной к массе переменной  $p_m$ . Поэтому краевая задача формулируется с 7 граничными условиями для 7 неизвестных переменных, и начальные условия краевой задачи задаются в виде:

$$\begin{aligned} p(K_0) &= p_0; \\ e_x(K_0) &= e_{x_0}; \quad e_y(K_0) = e_{y_0}; \\ i_x(K_0) &= i_{x_0}; \quad i_y(K_0) = i_{y_0}; \\ L_K(K_0) &= L_{K_0}; \quad m(0) = m_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $K_0$  – некоторое фиксированное значение начальной вспомогательной долготы.

Конечные граничные условия задаются в виде:

$$\begin{aligned} p(K_f) &= p_f; \\ e_x(K_f) &= e_{xf}; e_y(K_f) = e_{yf}; \\ i_x(K_f) &= i_{xf}; i_y(K_f) = i_{yf}; \\ L_K(K_f) &= L_{Kf}; p_m(K_f) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_f = K_0 + \Delta K$  – некоторое фиксированное значение конечной вспомогательной долготы. Нижний индекс «0» обозначает начальные условия, а нижний индекс «f» обозначает конечные условия,  $K_0$  и  $K_f$  являются заданными значениями вспомогательной долготы в начале и конце перелета соответственно. Краевая задача решается методом продолжения по параметру [3], который сводит краевую задачу к задаче Коши. Дифференциальное уравнение метода продолжения по параметру имеет вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b}. \quad (5)$$

Если параметр продолжения  $\tau$  входит в правую часть уравнений движения КА, то в этом случае дифференциальное уравнение метода продолжения по параметру принимает вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left( \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right). \quad (6)$$

Необходимо найти начальные значения сопряженных переменных  $\mathbf{z} = (p_p, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{L_K}, p_m)$ , при которых выполняются граничные условия рассматриваемой задачи. Для получения решения необходимо интегрировать дифференциальное уравнение метода продолжения по параметру  $\tau$  от 0 до 1. Для вычисления матрицы частных производных  $\Delta \mathbf{f} / \Delta \mathbf{z}$  используется метод комплексного шага [12–14] и функция невязок  $\mathbf{f}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p(K_f) - p_f \\ e_x(K_f) - e_{xf} \\ e_y(K_f) - e_{yf} \\ i_x(K_f) - i_{xf} \\ i_y(K_f) - i_{yf} \\ p_{L_K}(K_f) - p_{L_{Kf}} \\ p_m(K_f) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Система уравнений оптимального движения [7; 8] численно интегрируется относительно угловой дальности перелета  $K \in [K_0; K_f]$  с заданными начальными условиями для вычисления функции невязок  $\mathbf{f}$ .

### 3. Численные примеры

В данной работе в качестве примера использования разработанного метода рассматривается задача расчета многовиткового перелета на ГСО с промежуточной эллиптической орбиты. В качестве критерия оптимизации используется минимизация массы топлива. Число витков траектории предполагается фиксированным. Время перелета оптимизируется. Параметры промежуточной орбиты заданы фиксированными значениями высоты перигея (185 км), наклона (28,5°), аргумента перигея (180°), истинной аномалии (0°) и долготы восходящего узла (0°). Параметры промежуточной орбиты и начальная масса КА на этой орбите соответствуют использованию РН Falcon 9 [15]. Для многовиткового перелета с промежуточной орбиты на ГСО с двигателем малой тяги предполагается, что ЭРДУ состоит из 4 однотипных нерегулируемых двигателей СПД-140 с тягой по 280 мН и с удельным импульсом 1780 с. Параметры промежуточной орбиты и масса КА, доставляемая на эти орбиты РН Falcon 9, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Масса КА в зависимости от параметров промежуточной орбиты

Высота перигея, км	Высота апогея, км	Наклонение, градусы	Начальная масса, кг
185	50000	28,5	4044
185	60000	28,5	3869
185	70000	28,5	3741
185	80000	28,5	3642
185	90000	28,5	3564
185	100000	28,5	3501

На рис. 1 представлена вычисленная зависимость конечной массы КА на ГСО и оптимальное время перелета на ГСО с числом витков от 90 до 100 для заданной высоты апогея 50000 км.

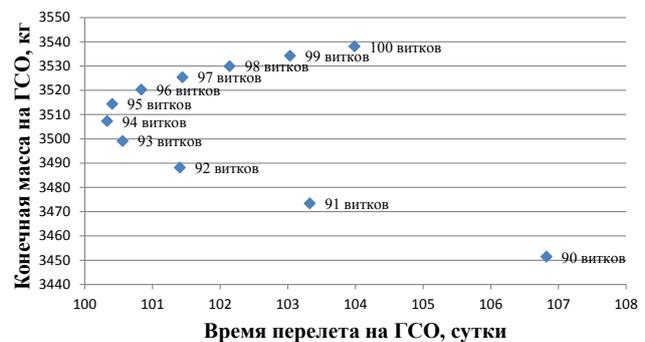


Рис. 1. Зависимость конечной массы КА на ГСО от длительности выведения на ГСО при различной угловой дальности перелета

При фиксированной высоте апогея промежуточной орбиты 50000 км и угловой дальности перелета 94 витка достигается минимальная длительность перелета (100,3332 суток), при этом на ГСО доставляется КА массой 3507,3098 кг. Для остальных заданных высот апогея промежуточной орбиты также были получены зависимости конечной массы КА на ГСО от длительности выведения. Эти зависимости представлены на рис. 2.

Очевидно, что огибающая представленных на рис. 2 кривых будет представлять собой Парето-фронт задачи максимизации доставляемой на ГСО массы КА и минимизации длительности перелета. Эта огибающая позволяет определить оптимальные значения высоты апогея промежуточной орбиты и оптимальное число витков, которые для каждой длительности перелета обеспечивают доставку на ГСО КА максимальной массы. Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты, определяющая Парето-фронт, представлена в табл. 2.

Для оценки оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений числа витков и значений конечной массы КА в промежутках между вычисленными длительностями перелета используется интерполяция данных из табл. 2 *B*-сплайнами. Выводятся функция Гаусса высшего порядка (8)–(10) для оценки этих величин, а в табл. 3–5 указаны значения используемых в этих формулах значения коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ .

$$r_a(\Delta t) = \sum_{i=1}^7 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right); \quad (8)$$

$$N_{rev}(\Delta t) = \sum_{i=1}^6 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right); \quad (9)$$

$$m(\Delta t) = \sum_{i=1}^5 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right). \quad (10)$$

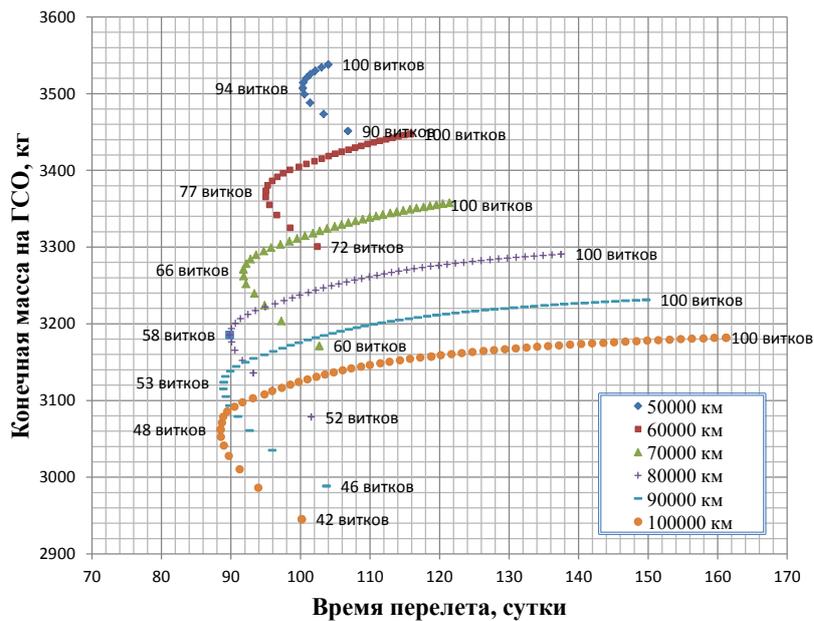


Рис. 2. Зависимость массы КА на ГСО от длительности выведения на ГСО с различными высотами апогея

Таблица 2

Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты

Высота апогея, км	Время перелета, сутки	Конечная масса, кг	Число витков
50000	100,3332505	3507,309821	94
60000	95,04643895	3373,430022	77
70000	91,80151375	3270,957328	66
80000	89,80805343	3185,700842	58
90000	88,96042273	3123,891598	53
100000	88,51588761	3062,320214	48

Таблица 3

Значения коэффициентов для интерполяции оптимального радиуса апогея

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
$a_i$	1,52e+05	848,5	-175,7	6,095e+04	2256	176,4	4,43e+04
$b_i$	85,34	89,78	89,66	80,31	106,1	94,95	106,5
$c_i$	2,186	0,8258	0,887	13,07	4,009	4,196	60,08

Таблица 4

Значения коэффициентов для интерполяции оптимального числа витков

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$a_i$	83,42	94,23	-21,81	25,14	0,01428	7,028
$b_i$	103,1	95,26	95,24	89,33	93,34	88,55
$c_i$	4,645	5,259	3,292	2,869	0,01916	1,318

Таблица 5

Значения коэффициентов для интерполяции конечной массы КА

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$a_i$	3579	533,3	165,9	37,32	158,1
$b_i$	105,1	89,62	88,24	88,6	95,27
$c_i$	25,37	4,879	2,539	1,076	4,61

Зависимости оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений числа витков и значений конечной массы КА от продолжительности перелета на интервале от 88,516 суток до

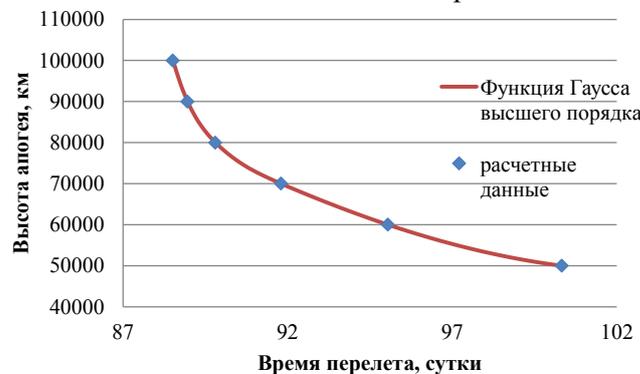


Рис. 3. Зависимость оптимальных значений высоты апогея от длительности выведения на ГСО

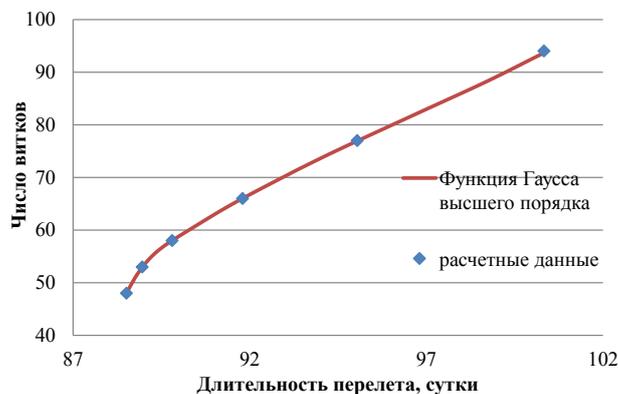


Рис. 4. Зависимость оптимального числа витков от длительности выведения на ГСО

100,333 суток, вычисленные по (8)–(10), представлены на рис. 3–5.

На рис. 6 и 7 представлены виды оптимальной ОТ траектории перелета с заданных

промежуточных орбит (высота перигея – 185 км, высота апогея – 50000 км, 60000 км, 70000 км, 80000 км, 90000 км, 100000 км, наклонение –  $28,5^\circ$ ) на ГСО.

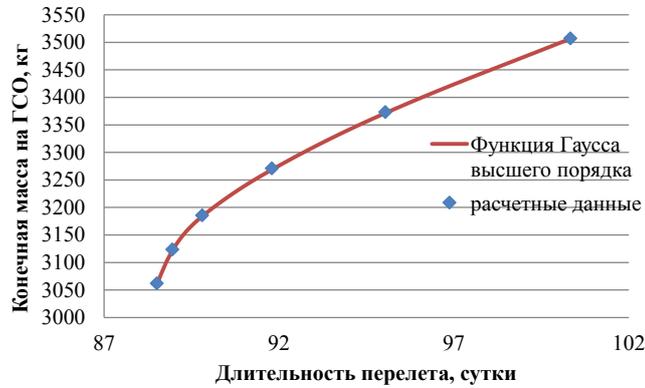


Рис. 5. Зависимость конечной массы КА на ГСО от длительности перелета

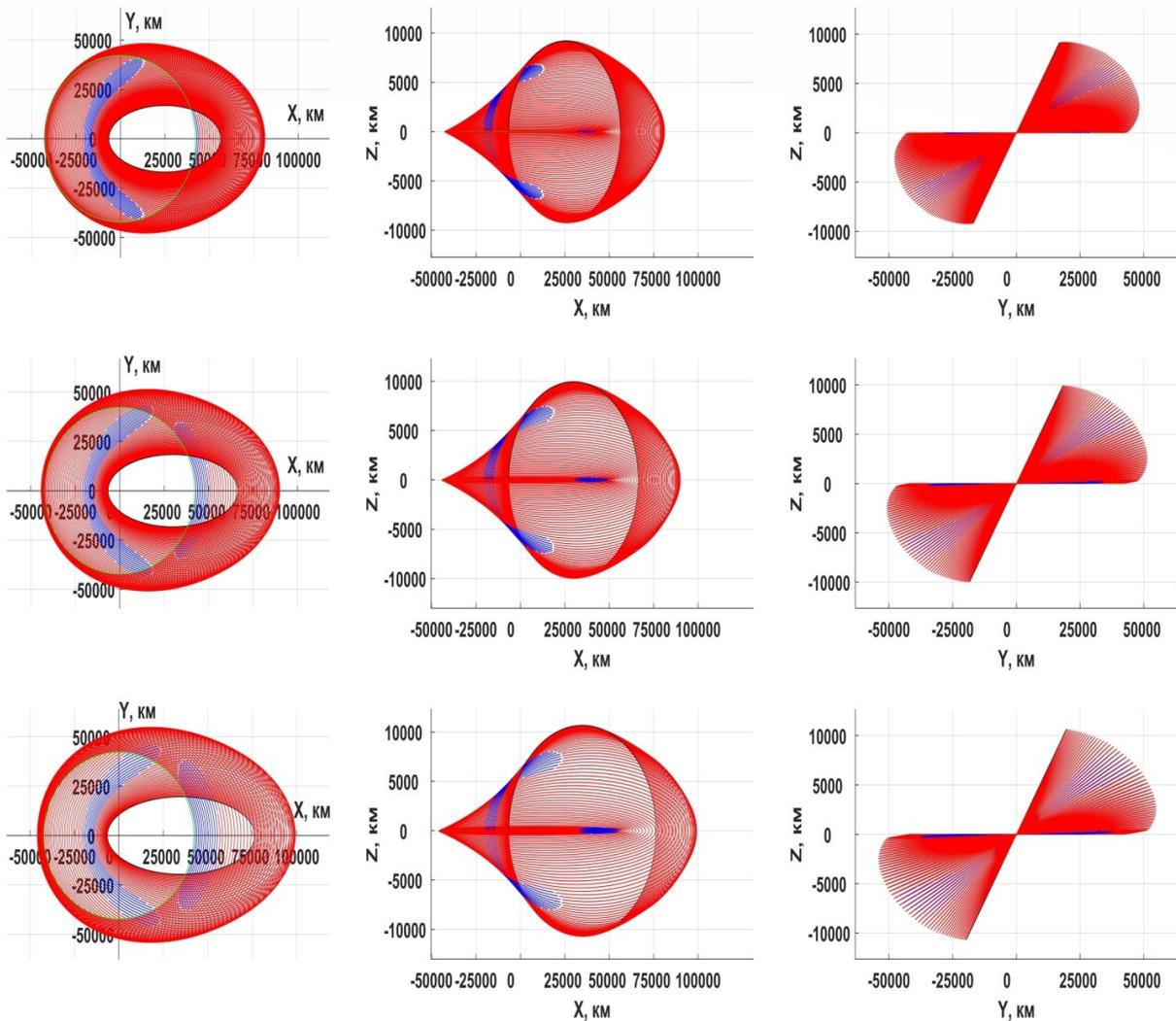


Рис. 6. Проекция оптимальных траекторий на координатные плоскости: верхний ряд – 94 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 50000 км, средний ряд – 77 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 60000 км, нижний ряд – 66 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 70000 км

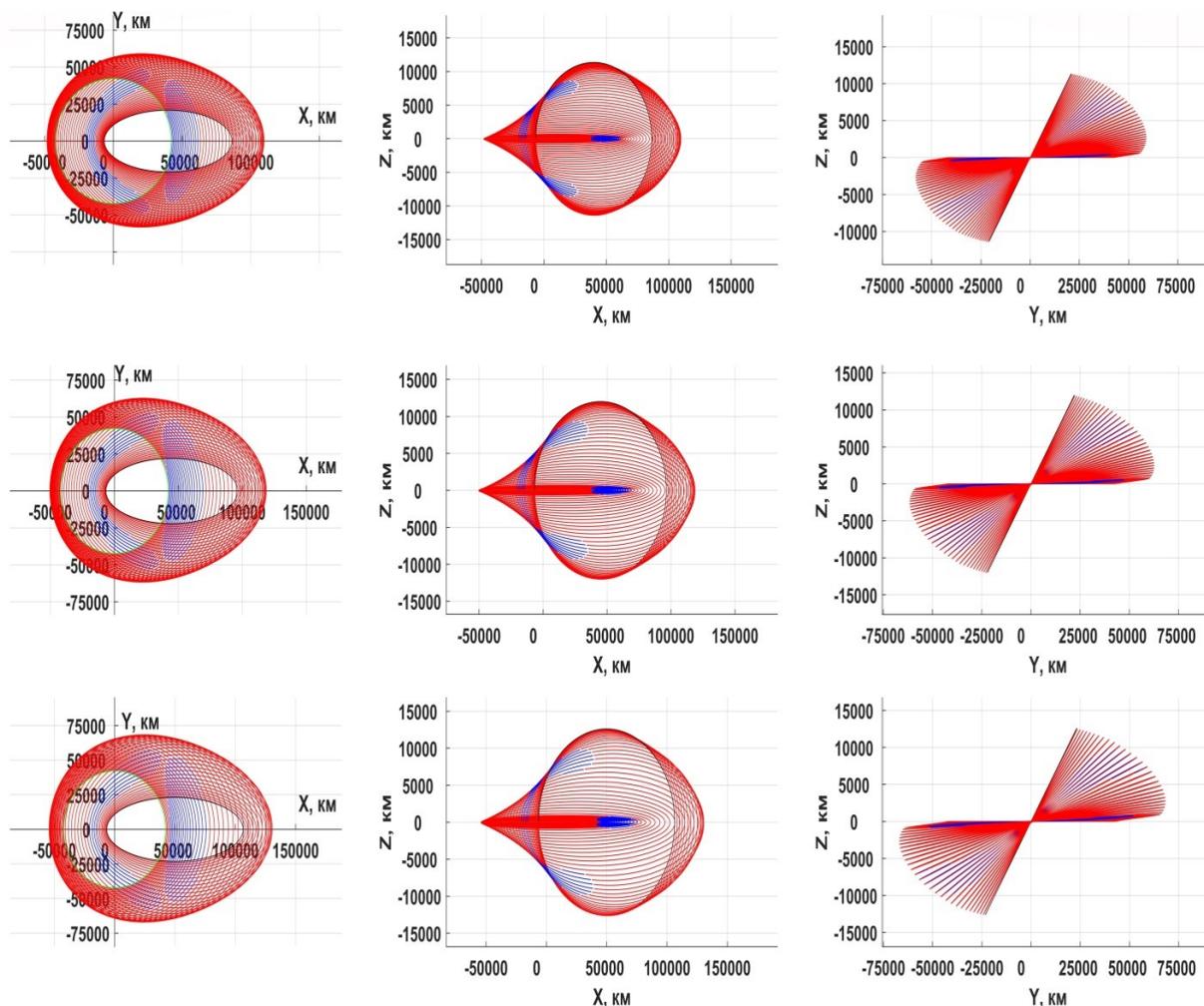


Рис. 7. Проекция оптимальных траекторий на координатные плоскости: верхний ряд – 58 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 80000 км, средний ряд – 53 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 90000 км, нижний ряд – 48 витковые ОТ траектории с начальной высотой апогея 100000 км

## Заключение

В работе рассмотрена задача оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ на ГСО. Запуск осуществлялся с космодрома на мысе Канаверал с помощью ракеты-носителя Falcon 9. Рассмотрена комбинированная схема выведения с использованием промежуточной эллиптической орбиты. Перелет на геостационарную орбиту после отделения КА от ракеты-носителя осуществляется с использованием электроракетной двигательной установки с 4 однотипными нерегулируемыми двигателями СПД-140.

Рассмотрена задача оптимизации многоразового перелета между орбитами КА с двигателем

ОМ и ОТ. Результаты решения ОМ задачи используются в качестве начальных приближений для сопряженных переменных при решении ОТ задачи. Для решения задачи оптимизации используется принцип максимума Понтрягина, относящийся к непрямым методам. Принцип максимума свел задачу оптимального управления к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная краевая задача решалась методом продолжения по параметру, который сводил краевую задачу к задаче Коши.

Представлены полученные оценки максимальной конечной массы КА при выведении КА на ГСО с использованием маршевой ЭРДУ с геопереходных орбит, обеспечиваемых РН Falcon 9.

## Список литературы

- [1] Walker M. J. H., Ireland B., Owens J. A Set of Modified Equinoctial Elements // *Celestial Mechanics*. 1985. vol. 36. pp. 409–419. doi: 10.1007/BF01227493.

- [2] Pontriaguine L., Boltianski V., Gamkrelidze R., Michtchenko E. Theorie mathematique des processus optimaux. Moscow : Mir, 1978. 317 p.
- [3] Петухов В. Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237.
- [4] Петухов В. Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения : дисс. ... д-р техн. наук: 05.07.09. М., 2013. 223 с.
- [5] Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. № 3. С. 250–268.
- [6] Паинг Сое Ту У. Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 9 (105).
- [7] Петухов В. Г., Паинг С. Т. У. Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем малой тяги // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2019. № 3. С. 140–154. doi: 10.1134/S0002331019030154.
- [8] Петухов В. Г. Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 5. С. 373–385. doi: 10.1134/S0023420619050066.
- [9] Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G., Testoyedov N., Sung Wook Yoon. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronautica. 2022. vol. 197. pp. 354–367. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.03.012.
- [10] Graham K. F., Rao A. V. Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing // Journal of Spacecraft and Rockets. 2016. vol. 53. no. 2. pp. 289–303. doi: 10.2514/1.A33416.
- [11] Betts J. T. Optimal low-thrust orbit transfers with eclipsing // Optimal Control Applications and Methods. 2015. vol. 36. no. 2. pp. 218–240. doi: 10.1002/oca.2111.
- [12] Martins J. R. R. A., Sturdza P., Alonso J. J. The complex-step derivative approximation // ACM Transaction on Mathematical Software. 2003. vol. 29. no. 3. pp. 245–262. doi: 10.1145/838250.838251.
- [13] Nikolovski F., Stojkovska I. Complex-step derivative approximation in noisy environment // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. vol. 327. pp. 64–78. doi: 10.1016/j.cam.2017.05.046.
- [14] Hare W. L., Srivastava K. A Numerical Study of Applying Complex-step Gradient and Hessian Approximations in Derivative-Free Optimization // Pacific Journal of Optimization. 2022.
- [15] Falcon 9 Launch Vehicle Payload User's Guide [Электронный ресурс]. URL: [www.spaceflightnow.com/falcon9/001/f9guide.pdf](http://www.spaceflightnow.com/falcon9/001/f9guide.pdf) (дата обращения: 16.02.2023).

## OPTIMIZATION OF THE LAUNCH PROFILE OF GEOSTATIONARY SPACECRAFT WITH ELECTRIC PROPULSION SYSTEM USING FALCON-9 LAUNCH VEHICLE

**Paing Soe Thu Oo**

*Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russian Federation*

*A combined flight profile is being considered, in which the Falcon 9 launch vehicle launches the spacecraft into elliptical intermediate orbit from the Cape Canaveral launch site. In the process of analyzing the problem, the value of the height of the perigee and the inclination of the intermediate orbit are fixed, and the height of the apogee of the intermediate orbit varies. After separation from the last stage of the launch vehicle, the spacecraft carries out transfer to geostationary orbit using electric propulsion system. At the stage of insertion spacecraft from intermediate orbit to geostationary orbit using electric propulsion system, the problem of minimizing the mass of the propellant, multi-revolutionary transfer is considered. The number of revolution and the height of the apogee of the intermediate orbit vary in order to analyze the effect of these parameters on the duration of the transfer and the delivered mass of the spacecraft into geostationary orbit. The main purpose of this paper is to calculate the optimal values of the apogee height of the intermediate orbit and the optimal number of revolution that ensure the delivery of the maximum mass of the spacecraft to the geostationary orbit in a given time  $\Delta t^*$ . To solve the optimization problem, the Pontryagin maximum principle is applied. After apply-*

*ing the maximum principle, the optimization problem is reduced to solving the boundary value problem, which is solved by the continuation method by parameter. The paper presents the results of the optimization problem of multi-revolutionary transfer and analysis of the energy characteristics of combined flight profile for insertion of spacecraft into geostationary orbit.*

*Keywords: limited power, limited thrust, auxiliary longitude, Pontryagin maximum principle, continuation method by parameter.*

## References

- [1] Walker M. J. H., Ireland B., Owens J. A Set of Modified Equinoctial Elements // *Celestial Mechanics*, 1985, vol. 36, pp. 409–419. doi: 10.1007/BF01227493.
- [2] Pontriaguine L., Boltianski V., Gamkrelidze R., Michtchenko E. *Theorie mathematique des processus optimaux*. Moscow, Mir, 1978, 317 p.
- [3] Petukhov V. G. *Optimizaciya mezhplanetnyh traektorij kosmicheskikh apparatov s ideal'no-reguliruемым dvigatelem metodom prodolzheniya* [Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method] // *Cosmic Research*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 219–232. (In Russian)
- [4] Petukhov V. G. *Optimization of trajectories of spacecraft with electric propulsion systems by the continuation method* : Doctor Diss. Moscow, 2013, 223 p.
- [5] Petukhov V. G. Optimization of multi-turn flights between non-planar elliptical orbits // *Cosmic Research*, vol. 42, no. 3, pp. 250–268.
- [6] Paing Soe Thu Oo. *Metod optimizacii traektorii pereleta na konechnuyu orbitu c chastichno zadannymi elementami* [A method for optimizing the trajectory of a flight to a finite orbit with partially specified elements] // *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, no. 9 (105). (In Russian)
- [7] Petukhov V. G., Paing Soe Thu Oo. *Optimizaciya mnogovitkovyh traektorij mezhorbital'nogo pereleta s ideal'no-reguliruемым dvigatelem maloj tyagi* [Optimization of Power-Limited Multi-Revolution Low-Thrust Interorbital Trajectories] // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Energy*, 2019, no. 3, pp. 140–154. doi: 10.1134/S0002331019030154. (In Russian)
- [8] Petukhov V. G. *Primenenie uglovoj nezavisimoy peremennoj i ee reguljariziruyushchego preobrazovaniya v zadachah optimizacii traektorij s maloj tyagoy* [Application of the Angular Independent Variable and Its Regularizing Transformation in the Problems of Optimizing Low-Thrust Trajectories] // *Cosmic Research*, 2019, vol. 57, no. 5, pp. 373–385. doi: 10.1134/S0023420619050066. (In Russian)
- [9] Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G., Testoyedov N., Sung WookYoon. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // *Acta Astronautica*, 2022, vol. 197, pp. 354–367. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.03.012.
- [10] Graham K. F., Rao A. V. Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2016, vol. 53, no. 2, pp. 289–303. doi: 10.2514/1.A33416.
- [11] Betts J. T. Optimal low-thrust orbit transfers with eclipsing // *Optimal Control Applications and Methods*, 2015, vol. 36, no. 2, pp. 218–240. doi: 10.1002/oca.2111.
- [12] Martins J. R. R. A., Sturdza P., Alonso J. J. The complex-step derivative approximation // *ACM Transaction on Mathematical Software*, 2003, vol. 29, no. 3, pp. 245–262. doi: 10.1145/838250.838251.
- [13] Nikolovski F., Stojkovska I. Complex-step derivative approximation in noisy environment // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 327, pp. 64–78. doi: 10.1016/j.cam.2017.05.046.
- [14] Hare W. L., Srivastava K. A Numerical Study of Applying Complex-step Gradient and Hessian Approximations in Derivative-Free Optimization // *Pacific Journal of Optimization*, 2022.
- [15] Falcon 9 Launch Vehicle Payload User's Guide. Available at: [www.spaceflightnow.com/falcon9/001/f9guide.pdf](http://www.spaceflightnow.com/falcon9/001/f9guide.pdf) (accessed 16.02.2023).

## Сведения об авторе

Паинг Сое Ту У – аспирант Московского авиационного института. Область научных интересов: динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов.