

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФЛАТТЕРА В ИЗОТРОПНЫХ И ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УГЛАМИ СКОСА

Н. С. Азиков¹✉, А. В. Зинин², Ю. В. Гайдаржи³

¹Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН
г. Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

г. Москва, Российская Федерация

³ООО Топс Бизнес Интегратор

г. Москва, Российская Федерация

Цель проведенных исследований: определить возможность возникновения панельного флаттера в диапазоне средних сверхзвуковых скоростей в многослойной композитной пластине с формой прямоугольника или параллелограмма и учетом направления действия скоростного потока относительно ее продольных кромок. Проведено исследование возможности возникновения панельного флаттера в диапазоне средних сверхзвуковых скоростей ($1,4 < M < 2$). Изучено влияние граничных условий и углов скоса изотропной и ортотропной пластин на критическую скорость флаттера. Записываются основные соотношения (физические и геометрические) для многослойной композитной пластины с симметричной укладкой слоев по толщине в косоугольной системе координат, связанной с геометрией контура. Поскольку геометрические граничные условия на каждой кромке пластины могут быть разными, для аппроксимации формы прогиба используются известные «балочные» функции по каждой координате косоугольной системы координат. Исходная задача обтекания пластины потоком сверхзвукового газа считается нестационарной. Но поскольку далее возникает потребность в нескольких собственных частотах колебаний, последние находятся из условия минимума полной потенциальной энергии системы. Решение нестационарной задачи строится на основе нескольких собственных частот колебаний при фиксированных значениях скорости потока газа, обтекающего пластину. Однородная система уравнений получена с помощью метода Бубнова-Галеркина при прогибе, представленном в виде ряда, составленного из собственных форм. Последние выбираются из граничных условий. В качестве критического параметра системы выступает условие равенства нулю действительной части комплексно-сопряженных собственных значений. Возникновение флаттера связывается с изменением знака действительной части собственных значений, которые находятся из условия нетривиальности решения однородной системы уравнений. Для выбранных геометрических размеров пластин и механических характеристик материала найдены критические скорости флаттера и частоты колебаний. Проведен анализ результатов. Отмечено, что в исходной постановке задачи имеет место возникновение панельного флаттера в среднем диапазоне сверхзвуковых скоростей.

Ключевые слова: скошенные пластины, граничные условия, собственные частоты колебаний, комплексно-сопряженные собственные значения, флаттер пластин.

1. Обзор публикаций по аэроупругости и панельному флаттеру

Исследование устойчивости плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, является классическим и хорошо изученным типом флаттера [1, 3]. Предложенный А. А. Ильюшиным закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей [2], называемый «поршневой теорией», позволил значительно упростить исследования и определять момент возникновения панельного флаттера как взаимодействие двух собственных частот колебаний пластины. Результаты исследований показали, что потеря устойчивости и значительное возрастание частоты колебаний возможны лишь при достаточно большой плотности и скорости газа. В работах В. В. Веденеева [4, 5] изучалась устойчивость пластины в двумерной постановке, имеющая форму широкой полосы. Было показано, что неустойчивость может быть двух видов: связанный и одномодовый флаттеры. В. В. Веденеев утверждает, что одномодовый флаттер возникает при низких сверхзвуковых скоростях. В этом случае потеря устойчивости происходит без взаимодействия между собственными модами и может иметь место при сколь угодно малой плотности потока. Автором получены критерии устойчивости обоих типов флаттера и частоты, при которых происходит наибольшее усиление колебаний и выявлены физические механизмы усиления колебаний. Исследования С. Д. Алгазина и И. А. Кийко [7] были направлены на изучение механизма возникновения флаттера пластин конечного размера в диапазоне ($1 < M < 2$), т.е. начиная от низких сверхзвуковых скоростей потоков газа.

Применение современных высокомодульных и высокопрочных композитных материалов в конструкции крыльев, стабилизаторов, элеронов самолетов потребовало продолжения исследований по их влиянию на аэроупругость конструкций. В статье Elkins Rush, Wang Gang [8] предложена спектральная модель конечных элементов (SFEM) для проведения аэроупругого и динамического анализа композитных крыльев. Управляющие уравнения получены на основе динамической модели балки растяжения-изгиба-кручения, в которую включены эффекты коробления. Вместо этого используется аэродинамическая модель для прогнозирования аэроупругости.

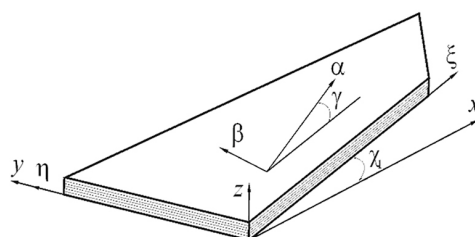
Достижения в области аэроупругости конструкций самолетов демонстрируют растущую тенденцию к использованию интеллектуальных материалов с композитными конструкциями для улучшения аэроупругих характеристик. В статье [9] для оценки влияния интеллектуальных материалов были использованы 3D-композиты со встроенными проволоками SMA (для улучшения свойств в плоскости).

Авторами было оценено влияние таких материалов при испытаниях на флаттер в аэродинамической трубе в условиях низкой скорости полета. Были рассмотрены три трехмерные ортогональные конфигурации интерлока с различным рисунком переплетения нитей с проволокой SMA. В публикации [10] исследована нелинейная динамическая аэроупругость композитных крыльев в сжимаемых потоках. Составное крыло моделировалось как тонкостенная балка (TWB) с асимметричной по окружности конфигурацией укладки композитных слоев. Нестационарные аэродинамические нагрузки рассчитывались в соответствии с моделью сжимаемой жидкости, описываемой аппроксимацией ориентировочной функции во временной области. Система аэроупругих уравнений дополнялась дифференциальными уравнениями, управляющими запаздывающими состояниями аэродинамики. В статье [9] исследуется оптимизация аэроупругости и прочности композитных конструкций. Ввиду низкой эффективности традиционного процесса оптимизации аэроупругости и прочности предлагается последовательный процесс оптимизации аэроупругости и прочности, который отделяет аэроупругий анализ от процесса оптимизации, уменьшает количество вызовов программы аэроупругого анализа и, таким образом, сокращает цикл оптимизации и повышает эффективность оптимизации. В [11] выполнялась оптимизация аэроупругости и прочности композитных конструкций самолетов. Метод расчета надежности сравнивается с традиционным методом детерминированного проектирования. В статье [12] была представлена серия расчетов численного моделирования для оценки влияния несбалансированного по толщине пакета композитных слоев на статическую аэроупругость крыльев большого удлинения. Slesongsom S., Kumar S., Bureerat S. [13] выполнили частичную оптимизацию топологии конструкции на основе надежности (RI3PTO). Это новый подход к проектированию конструкций самолетов, однако предложенный подход усложняет вычисления и делает анализ аэроупругости довольно сложным. В исследовании предложена многоцелевая оптимизация частичной топологии композитного крыла самолета на основе надежности с использованием метаэвристического подхода с использованием нечеткой информации. Как известно, в композитных материалах возникают первоначальные дефекты. Инструменты прогрессивного анализа повреждений помогают понять механизмы возникновения и роста повреждений, а также помогают в разработке, анализе и методах поддержания. Подход к глобально-локальному моделированию для однострунной панели с постфиксным изгибом оценен в работе [14]. Усилия авторов были направлены на разработку, оценку и совершенствование методов прогнозирования и выхода из строя композитных панелей со шляповидным

усилением после сгибания с использованием коммерчески доступного программного обеспечения Abaqus. В статье J. G. Easley, G. Luessen [16] определялись границы устойчивости для нескольких вариантов нагружения и граничных условий: свободно опертые пластины, нагруженные касательными усилиями; свободно опертые пластины при сдвиге и двухосном сжатии; свободно опертые пластины со стреловидностью и панели, нагруженные сжимающими усилиями в двух направлениях по размаху и по хорде. Аэродинамические силы по большей части основаны на статическом приближении с добавлением в некоторых случаях аэродинамического демпфирования. Было обнаружено, что использование статических аэродинамических сил может при определенных обстоятельствах привести к ложным значениям границы флаттера. Добавление аэродинамического демпфирования помогает установить правильную границу. D.J. Ketter [17] применил принцип минимума потенциальной энергии в сочетании с методом Рэлея-Ритца для вывода уравнения флаттера для плоских прямоугольных изотропных и ортотропных панелей. Поток газа, обтекавшего пластину, был представлен в виде квазистационарного сверхзвукового выражения, справедливого для диапазона скоростей $M > 2^{1/2}$. В уравнение частот колебаний было включено вязкое структурное демпфирование.

2. Методика поиска скорости потока газа в момент возникновения флаттера поверхности пластины

Ориентируясь на проведенный обзор публикаций и работы В. В. Веденеева [4, 5], можно предположить, что имеющиеся результаты исследований практически не затронули проблему возможного неустойчивого состояния собственных колебаний пластин из композиционных материалов в диапазоне средних сверхзвуковых скоростей ($1,4 < M < 2$). Наличие неустойчивости собственных колебаний пластин может быть связано с возникновением панельного флаттера. Проведем исследования по влиянию обтекания сверхзвуковым потоком поверхности скошенной пластины с различными граничными условиями на ее кромках.



Методика поиска неустойчивых состояний взята из работы [4] и включает следующие этапы: для заданных геометрических размеров пластины, характеристик материала и первых 12 собственных частот колебаний определяем безразмерные величины $\bar{D}, L, B$; находим безраз-

мерные частоты колебаний $\bar{\omega}_0 = \omega_{mn} h / a_0$ как начальное приближение; фиксируем скорость потока $M = \{1,4; 1,5; 1,7; 1,9; \dots\}$. Подставив эти величины в однородную систему уравнений нестационарных колебаний пластины, определяем вектор комплексных частот $[\lambda] = \text{Re}([\lambda]) + i \text{Im}([\lambda])$. Меняя безразмерную частоту колебаний $\bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + \Delta \bar{\omega}_i$, находим ту, при которой действительная часть собственного значения $\text{Re}([\lambda])$ меняет знак на противоположный, т.е. выполняется условие $\text{Re}([\lambda]_i) \cdot \text{Re}([\lambda]_{i+1}) < 0$. Далее с помощью метода Ньютона уточняем безразмерную частоту $\bar{\omega}_{i+1}$, при которой $\text{Re}([\lambda]_{i+1}) \approx 0$.

3. Основные соотношения

Исследуем влияние граничных условий и угла скоса χ на частоту собственных колебаний ω^* и скорость флаттера четырехугольных ортотропных пластин (рисунок 1). Будут рассмотрены следующие граничные условия на контуре пластины: (1) – все кромки шарнирно оперты (ш-ш-ш-ш); (2) – кромки слева и справа шарнирно оперты, сверху и снизу – свободны от закрепления (ш-с-ш-с); (3) – поперечные кромки слева и справа защемлены, сверху и снизу – свободны от закрепления (з-с-з-с).

Введем систему координат $\xi\eta z$, которую свяжем с геометрией пластины таким образом, чтобы ось 0ξ совпадала с нижней гранью, ось 0η – с левой гранью пластины, а ось $0z$ направим в поперечном направлении, чтобы образовалась правая тройка векторов. Для прямоугольной пластины $\chi_1 = \chi_2 = \theta = 0$; $b_1 = b_2 = b$; $l_1 = l_2 = a$.

Запишем уравнение колебаний четырехугольной ортотропной пластины

$$D_{11}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) w_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} w_{,\eta\eta\eta\eta} - (1) \\ - N_{\xi} w_{,\xi\xi} - N_{\eta} w_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} w_{,\xi\eta} + \rho h w_{,tt} = 0,$$

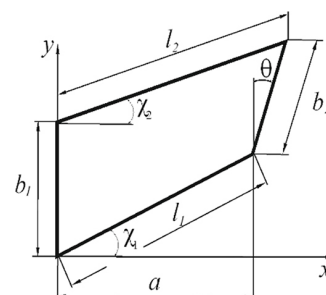


Рисунок 1. Системы координат и геометрические параметры четырехугольной пластины

$$\text{где } [N]_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} N_{\xi} \\ N_{\eta} \\ N_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{\xi\eta} & B_{12}^{\xi\eta} & 0 \\ B_{21}^{\xi\eta} & B_{22}^{\xi\eta} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33}^{\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} - \text{усилия}$$

в пластине;

$$[B]^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} B_{11}^{\xi\eta} & B_{12}^{\xi\eta} & 0 \\ B_{21}^{\xi\eta} & B_{22}^{\xi\eta} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33}^{\xi\eta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [A]^{\xi\eta} dz - \text{мембранные}$$

жесткости;

$$[D]^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} D_{11}^{\xi\eta} & D_{12}^{\xi\eta} & 0 \\ D_{21}^{\xi\eta} & D_{22}^{\xi\eta} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{\xi\eta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [A]^{\alpha\beta} z dz - \text{изгибные}$$

жесткости.

Обобщенные жесткости $[A]^{\xi\eta}$ в косоугольном базисе равны [18], [19]:

$$[A]^{\xi\eta} = [R^{(1)}]^{-1} [A]_{\alpha\beta} = [R^{(2)}] [A]^{\alpha\beta},$$

где $[A]_{\alpha\beta}$ – обобщенные жесткости в ортогональном базисе $\alpha\beta z$ [15],

$$[R^{(1)}] = \begin{bmatrix} \sec^2 \chi & tg^2 \chi & -\sin \chi \sec^2 \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2tg \chi & \sec \chi \end{bmatrix}$$

$$[R^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \chi & \sin^2 \chi & -\sin \chi \cos \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix}$$

$$\chi = (\chi_1 + \chi_2) / 2;$$

$$[A]^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_i & \sin^2 \varphi_i & 0,5 \sin 2\varphi_i \\ \sin^2 \varphi_i & \cos^2 \varphi_i & -0,5 \sin 2\varphi_i \\ -\sin 2\varphi_i & \sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{\alpha}^{(k)} & \mu_{12} \bar{E}_{\beta}^{(k)} & 0 \\ \mu_{21} \bar{E}_{\alpha}^{(k)} & \bar{E}_{\beta}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\alpha\beta}^{(k)} \end{bmatrix};$$

$[e]_{\alpha\beta} = [e_{\alpha} \ e_{\beta} \ e_{\alpha\beta}]^T = [\varepsilon_{\alpha} \ \varepsilon_{\beta} \ \varepsilon_{\alpha\beta}]^T + z [\zeta_{\alpha} \ \zeta_{\beta} \ \zeta_{\alpha\beta}]^T$ – полные деформации ортотропного слоя. Они связаны с деформациями пластины соотношениями

$$[e]_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_i & \sin^2 \varphi_i & \sin 2\varphi_i \\ \sin^2 \varphi_i & \cos^2 \varphi_i & -\sin 2\varphi_i \\ -0,5 \sin 2\varphi_i & 0,5 \sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_{\alpha} = E_{\alpha} / (1 - \mu_{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha}), \quad \bar{E}_x = E_x / (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})$$

φ_i – угол армирования ортотропного слоя.

Напряженное состояние пластины и ортотропного слоя

$$[\sigma]_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha} \\ \sigma_{\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{\alpha} & \mu_{\alpha\beta} \bar{E}_{\beta} & 0 \\ \mu_{\beta\alpha} \bar{E}_{\alpha} & \bar{E}_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha} \\ \varepsilon_{\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_x & \mu_{xy} \bar{E}_x & 0 \\ \mu_{yx} \bar{E}_x & \bar{E}_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

В уравнении (1) w , ρ , h – прогиб пластины, удельный вес материала, толщина пластины.

Считая, что прогиб пластины изменяется по гармоническому закону $w = W \cos \omega t$, где ω – частота колебаний, уравнение колебаний примет вид

$$D_{11}^{\xi\eta} W_{,\xi\xi\xi\xi} + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) W_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} W_{,\eta\eta\eta\eta} - N_{\xi} W_{,\xi\xi} - N_{\eta} W_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} W_{,\xi\eta} - \rho \omega^2 h W = 0$$

Частоты колебаний скошенной пластины будем искать методом Рэлея-Ритца. Представим прогиб панели в виде ряда

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{w}_{1m}(\xi) \bar{w}_{2n}(\eta), \quad (2)$$

где A_{mn} – амплитуда прогиба с числами полувольт m, n ; $\bar{w}_{1m}, \bar{w}_{2n}$ – собственные формы, определяемые граничными условиями задачи. Выразим последние с помощью известных «балочных» функций А. Н. Крылова для различных случаев крепления контура пластины [20]. Полная потенциальная энергия в перемещениях

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ D_{11}^{\xi\eta} W_{,\xi\xi}^2 + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) W_{,\xi\xi} W_{,\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} W_{,\eta\eta}^2 - N_{\xi} W_{,\xi\xi} - N_{\eta} W_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} W_{,\xi\eta} - \rho \omega^2 h W^2 \right\} d\xi d\eta \quad (3)$$

S – площадь четырехугольной пластины.

Подставим ряд (2) в энергию (3). Для вычисления двойного интеграла разобьем пластину на четырехугольные элементы в продольном и поперечном направлениях с заданным шагом разбиения $i = \{0, \dots, i_{\max}\}; j = \{0, \dots, j_{\max}\}$ ($i_{\max}, j_{\max}$ – параметры сетки разбиения). При вычислениях интегралов используем кубатурную формулу Симпсона [20]. Минимизируя получающееся после интегрирования выражение по A_{mn} , получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд A_{mn}

$$([\Omega] - \frac{1}{4}\rho\omega^2 h l b [\Upsilon_\omega]) [A] = 0, \quad (4)$$

где $[\Omega]$, $[\Upsilon_\omega]$ – квадратные матрицы коэффициентов;

$$[\Omega] = \int_0^l \int_0^b \begin{bmatrix} W_{,\xi\xi} & W_{,\eta\eta} & 2W_{,\xi\eta} \end{bmatrix}^T [D]^{\xi\eta} \begin{bmatrix} W_{,\xi\xi} & W_{,\eta\eta} & 2W_{,\xi\eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta,$$

$$[\Upsilon_\omega] = \int_0^l \int_0^b (W)^2 d\xi d\eta.$$

Однородная система уравнений (4) имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\det([\Omega] - \frac{1}{4}\rho\omega^2 h l b [\Upsilon_\omega]) = 0. \quad (5)$$

Определив численно элементы квадратных матриц, воспользуемся процедурой QL / QR [21, 22] и найдем вектор собственных частот колебаний ω четырехугольной ортотропной пластины в зависимости от граничных условий и контурных усилий. Минимальная частота колебаний в отсутствие контурных усилий равна

$$\omega = \frac{\pi^2}{lb} \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}}{\rho_m h}}.$$

Для прямоугольной изотропной пластины с выбранными граничными условиями и исходными данными (размеры сторон, модуль упругости, коэффициент Пуассона, удельный вес) определим первые 12 частот колебаний (таблица 1):

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н / м}^2; \mu = 0,3; \rho_m = 8500 \text{ кг / м}^3;$$

$$a = 3 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; h = 0,01 \text{ м}.$$

Для выполнения условия, чтобы при вычислениях собственных частот, собственных значений однородной системы уравнений из нестационар-

ной задачи обтекания потоком газа отсутствовали повторяющиеся величины, выбираем в ряде (2) слагаемые с парами чисел полувольт (m, n): (1,1); (2,2); (3,3); (4,3); (5,2); (6,3); (7,3); (4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2).

Результаты вычислений ω будут использованы при определении скорости флаттера.

4. Влияние граничных условий на скорость флаттера изотропной пластины

При определении скорости флаттера будем опираться на некоторые известные результаты, опубликованные в монографиях [1, 3], а именно: (а) с увеличением скорости потока V происходит сближение соседних частот вплоть до слияния, что характеризует начало перехода в область флаттера, и (б) по возможности избегать появления кратных корней однородной системы уравнений. В последнем случае необходимо определитель системы разделить на определитель Вандермонда [3].

Учитывая указанную информацию, будем выбирать элементы ряда (2) таким образом, чтобы числа полувольт m, n не давали при решении кратные корни. Слияние соседних частот указывает на появление в собственных значениях однородной системы уравнений комплексно-сопряженных собственных значений. И критерием перехода в область флаттера будет изменение знака действительной части комплексно-сопряженных собственных значений. Критическую скорость флаттера V^* при наличии нескольких комплексно-сопряженных собственных значений будем определять по минимальному значению действительной части комплексно-сопряженных значений.

Проведем исследование влияния граничных условий на скорость обтекающего потока, при котором появляется вероятность возникновения флаттера. На рисунке 2 показаны направление полета летательного аппарата и направление действия набегающего потока на пластину.

Уравнение колебаний прямоугольной изотропной пластины в потоке газа

$$D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - N_x w_{,xx} - N_y w_{,yy} - 2N_{xy} w_{,xy} = p_1 + p_2. \quad (6)$$

Здесь $D = \bar{E}/12$; $\bar{E} = E/(1 - \mu^2)$, μ – приведен-

ный модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; p_1 – аэродинамическое давление на внешнюю сторону пластины; p_2 – удельная инерционная нагрузка [3].

$$p_1 = -\frac{2q}{V\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} w_{,t} + V w_{,x} \right),$$

Таблица 1

Частоты собственных колебаний пластины

номер	ω Гц Ш-Ш-Ш-Ш	ω Гц Ш-С-Ш-С	ω Гц З-С-З-С
1	16,124	6,782	8,127
2	21,007	14,408	17,167
3	29,106	24,095	28,311
4	64,494	43,157	45,235
5	136,938	99,883	101,621
6	145,112	110,995	113,775
7	376,929	311,705	313,973
8	40,411	36,337	42,156
9	84,029	68,638	73,285
10	156,534	125,769	129,717
11	54,924	51,427	58,910
12	98,623	85,658	91,777

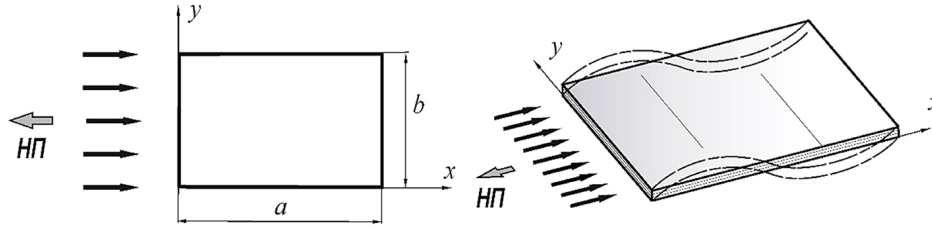


Рисунок 2. Направление полета (НП) и направление действия набегающего потока

$$p_2 = -\rho_m h w_{,tt}.$$

При скорости потока $M > 1,4$ аэродинамическое давление в соответствии с «поршневой теорией» [2] примем равным $p_1 = -\frac{\chi p_0}{a_0}(w_{,t} + V w_{,x})$,

где χ – показатель политропы газа; p_0 – давление в невозмущенном потоке; a_0 – скорость звука; V – скорость потока, обтекающего пластину.

4.1. Прямоугольная изотропная пластина под действием набегающего скоростного потока

Введем безразмерные величины

$$\tilde{D} = \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}} (h^3 a_0^2 \rho_m)^{-1}, \quad \bar{\omega} = \omega h / a_0, \\ L = l/h, \quad B = b/h; \quad a_0 = 300 \text{ м/с}.$$

Для прямоугольной изотропной пластины они равны

$$\tilde{D} = 23.9, \quad \rho_0 / \rho_m = 1.2 \cdot 10^{-4}, \\ L = 300, \quad B = 100, \quad 1.5 \leq M \leq 3.5.$$

Для поиска собственных значений исходной нестационарной задачи обтекания пластины потоком газа воспользуемся процедурой Бубнова-Галеркина. В уравнение (6) подставим ряд (3). Домножив каждое слагаемое ряда (3) на функцию-ошибку и численно интегрируя получающееся выражение по площади пластины, получим однородную систему уравнений относительно вектора собственных значений $[\lambda]$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} [\tilde{F}] - \\ & - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E] \end{aligned} \right\} [\lambda] = 0. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$[\tilde{\Omega}] = \iint_S (W_{mn,xxxx} \quad 2W_{mn,xxxy} \quad W_{mn,yyyy})^T W_{ij} d\xi d\eta;$$

$$[C] = \iint_S W_{mn} W_{ij} d\xi d\eta;$$

$$[F] = \iint_S W_{mn,x} W_{ij} dx dy;$$

$[E]$ – единичная матрица; $m, i \in [1 \dots m_{\max}]$, $n, j \in [1 \dots n_{\max}]$ – параметры сетки разбиения при интегрировании.

В однородной системе уравнений (7) в случае изотропного материала матрицы $[\tilde{\Omega}]$, $[C]$ – диагональные; матрица $[\tilde{F}]$ – внедиагональная.

Представим матрицу $[\Psi]$ как сумму матриц из системы уравнений (7)

$$[\Psi] = \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} [\tilde{F}] - \\ \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E].$$

Система уравнений (7) имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю, т.е. $\det[\Psi] = 0$. Комплексные собственные значения $[\lambda] = \text{Re}([\lambda]) \pm i \text{Im}([\lambda])$ матрицы $[\Psi]$ найдем с помощью программного модуля, реализованного на основе алгоритма QL / QR.

В соответствии с изложенной методикой для прямоугольной изотропной пластины находим начальное приближение частот колебаний $\bar{\omega} = \omega h / a_0$ (таблица 2).

После подстановки безразмерных частот в однородную систему уравнений (7) находим вектор

Таблица 2

Безразмерные собственные частоты – начальное приближение

номер	$\bar{\omega} = \omega h / a_0$ III-III-III-III	$\bar{\omega} = \omega h / a_0$ III-C-III-C	$\bar{\omega} = \omega h / a_0$ 3-C-3-C
1	5,37452E-05	2,2608E-05	2,70911E-05
2	7,00242E-05	4,80278E-05	5,72246E-05
3	9,70212E-05	8,03175E-05	9,43711E-05
4	0,000214981	0,000143857	0,000150784
5	0,00045646	0,000332946	0,000338738
6	0,000483706	0,000369984	0,000379252
7	0,001256428	0,001039018	0,001046576
8	0,000134704	0,000121125	0,00014052
9	0,000280097	0,000228794	0,000244284
10	0,000521779	0,000419233	0,000432391
11	0,00018308	0,000171424	0,000196368
12	0,000328746	0,00028553	0,000305924

Таблица 3

Векторы собственных значений системы уравнений (9). Начальное приближение

	$\text{Re}(\lambda_0)$	$\text{Im}(\lambda_0)$	$\text{Re}(\lambda_0)$	$\text{Im}(\lambda_0)$	$\text{Re}(\lambda_0)$	$\text{Im}(\lambda_0)$
	III-III-III-III		III-C-III-C		3-C-3-C	
1	0,00236777	0	0	0	0	0
2	0,00037016	0,0065315	1,0988E-05	0,01142534	2,0284E-05	0,0140807
3	0,00037015	-0,006531	1,0988E-05	-0,0114253	2,0284E-05	-0,014089
4	0,00033132	0	4,5855E-05	0,0099079	6,7357E-05	0,0120035
5	3,3853E-05	0,0114225	4,5855E-05	-0,0099079	6,7356E-05	-0,012003
6	3,3853E-05	-0,011425	0,00017284	0,00653151	0,00020317	0,0084797
7	1,4617E-05	0,0033808	0,00017282	-0,0065315	0,00020317	-0,008477
8	1,4617E-05	-0,003381	2,8082E-06	0,00338086	1,2192E-05	0,0045418
9	6,2704E-06	0	2,8082E-06	-0,0033808	1,2192E-05	-0,004548
10	0,00013933	0,0099078	0,00154488	0	0,00163138	0
11	0,00013933	-0,009907	0,00015619	0	0,00018026	0
12	7,0373E-05	0	2,0344E-05	0	2,7380E-05	0

Таблица 4

Векторы собственных значений системы уравнений (9) при шаге (p)

	$\text{Re}(\lambda_p)$	$\text{Im}(\lambda_p)$	$\text{Re}(\lambda_p)$	$\text{Im}(\lambda_p)$	$\text{Re}(\lambda_p)$	$\text{Im}(\lambda_p)$
	III-III-III-III		III-C-III-C		3-C-3-C	
1	2,7880E-05	0	0	0	0	0
2	4,2882E-06	0,00653164	-1,516E-06	0,01142538	-1,118E-05	0,0140806
3	4,2882E-06	-0,0065314	-1,516E-06	-0,0114253	-1,118E-05	-0,014080
4	3,8324E-06	0	1,9017E-06	0,0099073	-2,991E-05	0,0120034
5	3,6826E-07	0,01142539	1,9017E-06	-0,0099079	-2,991E-05	-0,012003
6	3,6826E-07	-0,0114259	7,3854E-05	0,0065315	2,6657E-06	0,0084800
7	1,5233E-07	0,00338086	7,3854E-05	-0,0065318	2,6657E-06	-0,008481
8	1,5233E-07	-0,0033806	-1,721E-06	0,0033808	3,4468E-07	0,0045414
9	6,0537E-08	0	-1,721E-06	-0,0033808	3,4468E-07	-0,004541
10	1,5863E-06	0,00990784	0,00083234	0	0,0002354	0
11	1,5863E-06	-0,0099074	7,4583E-05	0	1,3273E-05	0
12	7,8661E-07	0	6,2187E-06	0	-2,354E-06	0

собственных значений системы уравнений – начальное приближение (таблица 3).

Меняя исходные частоты $\bar{\omega}_{p+1} = \bar{\omega}_p + \Delta\bar{\omega}_p$, определяем момент, при котором действительная часть комплексно-сопряженного собственного значения $\text{Re}(\lambda)$ меняет знак на противоположный. Результаты вычислений до и после смены знака приведены в таблицах 4 и 5.

Сравнивая действительные компоненты комплексно-сопряженных собственных значений $\text{Re}(\lambda)$, делаем вывод, что для рассмотренных вариантов опирания кромок пластины условие $\text{Re}(\lambda_i) * \text{Re}(\lambda_{i+1}) < 0$ выполнено. И колебания пластин приобретают неустойчивый характер, следовательно, возможно насту-

пление флаттера. Критическая скорость флаттера соответствует комплексно-сопряженным корням: для схемы опирания кромок III-III-III-III $\lambda = -2,61935E-07 \pm 0,00338084i$; для схемы III-C-III-C $\lambda = -5,0567E-07 \pm 0,009907903i$; для схемы 3-C-3-C $\lambda = -3,60161E-08 \pm 0,00454147i$. Для рассмотренных граничных условий минимальная скорость флаттера лежит в низкочастотной части спектра при смешанном опирании кромок III-C-III-C и 3-C-3-C. В случае III-III-III-III происходит смещение частот колебаний в область высоких частот.

В отличие от прямоугольной пластины со свободно опертыми кромками (III-III-III-III), когда матрицы $[\Omega]$, $[C]$ являются диагональными, для

Таблица 5

Вектор собственных значений системы уравнений (9) при шаге $(p + 1)$

	$\text{Re}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$	$\text{Im}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$	$\text{Re}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$	$\text{Im}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$	$\text{Re}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$	$\text{Im}(\lfloor \lambda \rfloor_{p+1})$
	III-III-III-III		III-C-III-C		3-C-3-C	
1	-3,913E-05	0	0	0	0	0
2	-6,190E-06	0,006531	-2,201E-06	0,01142534	-1,219E-05	0,0140806
3	-6,190E-06	-0,006534	-2,201E-06	-0,0114258	-1,219E-05	-0,014089
4	-5,546E-06	0	-5,056E-07	0,0099079	-3,304E-05	0,012003
5	-5,907E-07	0,011425	-5,057E-07	-0,0099079	-3,304E-05	-0,012003
6	-5,907E-07	-0,011425	6,8433E-05	0,0065315	-3,775E-06	0,008480
7	-2,619E-07	0,003380	6,8433E-05	-0,0065315	-3,775E-06	-0,008480
8	-2,619E-07	-0,003380	-1,969E-06	0,0033808	-3,601E-08	0,004541
9	-1,173E-07	0	-1,969E-06	-0,0033808	-3,601E-08	-0,004541
10	-2,357E-06	0,009907	0,0007933	0	0,0001905	0
11	-2,357E-06	-0,009907	7,0113E-05	0	7,8918E-06	0
12	-1,206E-06	0	5,445E-06	0	-3,288E-06	0

пластин с другими граничными условиями указанные матрицы уже не являются диагональными, и элементы матриц оказывают влияние как на действительную, так и на мнимую части комплексных частот. Это замечание касается и матрицы $[\tilde{F}]$, которая влияет как на мнимую $\text{Im}(\lfloor \lambda \rfloor)$, так и на действительную часть комплексно-сопряженных частот.

4.2. Влияние угла скоса изотропной пластины на скорость флаттера

Рассмотрим пластину в форме параллелограмма, которую обтекает скоростной поток. На рисунке 3 показана схема направления действия потока на скошенную пластину с формой контура в виде параллелограмма. На пластину с углом скоса χ действует поток газа, направленный под углом ζ к оси Ox прямоугольной системы координат x, y . Для пластины в форме параллелограмма параметры углов скоса равны $\theta = 0$, $\chi_{sr} = \chi$. При расчетах скошенных пластин будем считать, что изгибные жесткости соответствуют ортотропному материалу. Влияние жесткостей $D_{13} \approx 0$, $D_{23} \approx 0$ не учитывается.

Скоростной поток в осях ξ, η , связанных с геометрией пластины, будет состоять из двух компонентов $V = \{V_{\xi} \sec(\chi - \zeta); -V_{\eta} \tan(\chi - \zeta)\}$. Уравнение колебаний скошенной пластины в потоке газа примет вид

$$D_{11}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) w_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} w_{,\eta\eta\eta\eta} - N_{\xi} w_{,\xi\xi} - N_{\eta} w_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} w_{,\xi\eta} + \frac{\chi p_0}{a_0} [w_{,\xi} + V_{\xi} \sec(\chi - \zeta) w_{,\xi} - V_{\eta} \tan(\chi - \zeta) w_{,\eta}] + \rho h w_{,\eta} = 0$$

Введем, как и ранее, безразмерные величины

$$\tilde{D} = \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}} (h^3 a_0^2 \rho_m)^{-1}, \quad \bar{\omega} = \omega h / a_0, \\ L = l / h, \quad B = b / h$$

Воспользовавшись процедурой Бубнова-Галеркина, найдем однородную систему уравнений нестационарной задачи обтекания скошенной ортотропной пластины потоком газа. Искомая однородная система уравнений в безразмерной форме примет вид

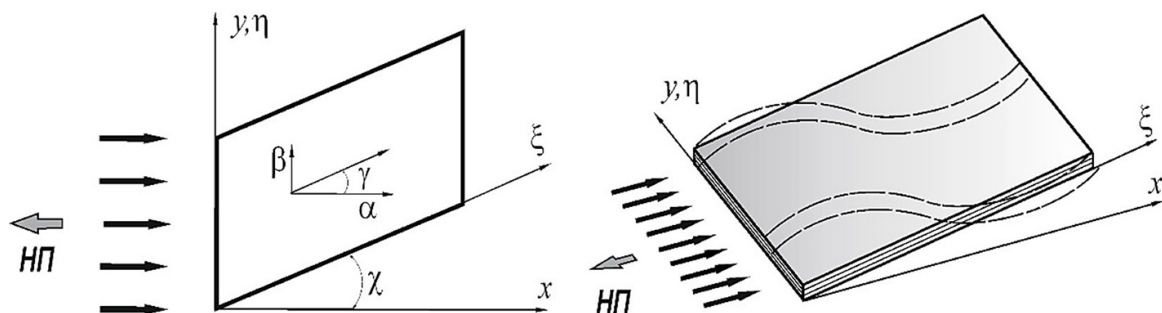


Рисунок 3. Геометрия скошенной пластины, направление полета (НП) и направление действия скоростного потока

$$\left\langle \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} \left\{ \sec(\chi - \zeta) [\tilde{F}_\xi] - \tan(\chi - \zeta) [\tilde{F}_\eta] \right\} - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E] \right\rangle [\lambda] = 0 \quad (8)$$

Здесь введены дополнительные обозначения, связанные с разложением вектора скорости обтекающего потока

$$[F_\xi] = \iint_S W_{mn,\xi} W_{ij} d\xi d\eta; \quad [F_\eta] = \iint_S W_{mn,\eta} W_{ij} d\xi d\eta.$$

Представим матрицу $[\tilde{\Psi}]$ как сумму матриц системы уравнений (8)

$$[\tilde{\Psi}] = \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} \left\{ \sec(\chi - \zeta) [\tilde{F}_\xi] - \tan(\chi - \zeta) [\tilde{F}_\eta] \right\} - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E]$$

Однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю $\det([\tilde{\Psi}]) = 0$. Исследуем влияние угла скоса и граничных условий на скорость флаттера для изотропной пластины при обтекании потоком газа с направлением действия $\zeta = 0^\circ$ со следующими данными:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н / м}^2; \mu = 0,3; \rho_m = 8500 \text{ кг / м}^3; \\ a = 3 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; h = 0,01 \text{ м}.$$

$$\chi = 15^\circ, \theta = 0^\circ.$$

Определим частоты колебаний пластины с граничными условиями (Ш-Ш-Ш-Ш), (Ш-С-Ш-С), (З-С-З-С). Далее был выполнен поиск собственных значений нестационарной задачи обтекания изотропной скошенной пластины потоком газа с вектором скорости, состоящим из двух компонентов $\vec{V} = [V_\xi \sec(\chi); -V_\eta \tan(\chi)]$. Однородная система уравнений, из которой определялись векторы собственных комплексно-сопряженных корней:

$$\left\langle \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} \left\{ \sec \chi [\tilde{F}_\xi] - \tan \chi [\tilde{F}_\eta] \right\} - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E] \right\rangle [\lambda] = 0$$

Анализ результатов вычислений критической скорости флаттера скошенной пластины показывает, что в рассмотренных случаях опирания кромок пластины имеет-

ся несколько пар комплексно-сопряженных собственных значений. Минимальные значения $[\lambda] = -1,06014\text{E} - 07 \pm 0,054145931$ для схемы Ш-Ш-Ш-Ш; $[\lambda] = -1,9023\text{E} - 08 \pm 0,00142098$ для схемы Ш-С-Ш-С. В отличие от двух предыдущих вариантов в случае пластины с заземленными поперечными и свободными продольными кромками изменение знака действительной части произошло с отрицательного значения $[\lambda] = -3,38721\text{E} - 05 \pm 0,00045157$ на положительное $[\lambda] = 0,000276775 \pm 0,00045157$ при $V^*/a_0 = 3,601$. Критические скорости флаттера будем определять этими комплексно-сопряженными собственными значениями.

Рассмотрим вариант пластины с углами скоса $\chi = 30^\circ, \theta = 0^\circ$ и характеристиками:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н / м}^2; \mu = 0,3; \rho_m = 8500 \text{ кг / м}^3; \\ a = 3 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; h = 0,01 \text{ м}.$$

Определим частоты колебаний пластины, далее из однородной системы уравнений начальное приближение и момент смены знака действительной части комплексно-сопряженных собственных значений. Из анализа результатов следует, что в случае схемы опирания Ш-Ш-Ш-Ш имеется только одна пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью $[\lambda] = -5,56102\text{E} - 08 \pm 0,11215146$; в случае схемы Ш-С-Ш-С имеются несколько пар комплексно-сопряженных корней. Критическая скорость флаттера будет соответствовать паре корней $[\lambda] = 0,000580373 \pm 0,011679279$. Для схемы опирания З-С-З-С имеются две пары самосопряженных комплексных корней. Из них выбираем пару с минимальным значением действительной части $[\lambda] = 0,001340861 \pm 0,037366503$.

Рассмотрим вариант пластины с углами скоса $\chi = 45^\circ, \theta = 0^\circ$. Определим частоты колебаний пластин в зависимости от граничных условий. В случае шарнирного закрепления сторон в скошенной пластине не возникает перехода в неустойчивое состояние колебаний системы – отсутствует смена знака действительной части комплексно-сопряженных корней. В случае схемы Ш-С-Ш-С имеются несколько пар комплексно-сопряженных корней. Критическая скорость флаттера будет соответствовать паре корней $[\lambda] = 0,000951297 \pm 0,005631806$. Для схемы опирания З-С-З-С также имеются несколько пар комплексно-сопряженных корней. Минимальное значение действительной части $[\lambda] = 0,000280572 \pm 0,000917861$.

5. Влияние направления потока газа на возникновение флаттера поверхности изотропной пластины

Исследуем влияние угла наклона набегающего потока на возникновение флаттера поверхно-

сти пластины. Рассмотрим варианты направления вектора скорости потока относительно оси Ox : $\zeta = \{-10^\circ, -20^\circ, -30^\circ\}$. Расчеты выполнялись для пластины с граничными условиями (3-С-3-С) и углами скоса $\chi = 15^\circ$, $\zeta = 0^\circ$. На пластину действовал скоростной поток под углами $(\chi - \zeta) = \{25^\circ, 35^\circ, 45^\circ\}$. Анализ результатов показывает, что на смену знака минимальной действительной части комплексно-сопряженных собственных значений влияет направление действия скоростного набегающего потока. Чем больше угол между вектором скорости и поперечной кромкой пластины, тем выше частота колебаний, при которой возможно наступление флаттера. Для рассмотренного случая имеет место следующая зависимость: при $(\chi - \zeta) = 25^\circ$ частота собственных колебаний равна $\omega = 74,161$ Гц; при $\omega = 74,16135^\circ$ – частота равна $\omega = 112,20$ Гц; при $(\chi - \zeta) = 45^\circ$ – $\omega = 135,07$ Гц.

5.1. Прямоугольная ортотропная пластина в сверхзвуковом потоке газа

Рассмотрим слоистую прямоугольную пластину из стеклопластика со следующими характеристиками материала:

$$E_1 = 50 \text{ ГПа}; E_2 = 7,45 \text{ ГПа}; G_{12} = 2,8 \text{ ГПа};$$

$$\mu_{21} = 0,25; \delta_i = 0,125 \text{ мм}.$$

Удельная масса материала $\rho_m = 1526 \text{ кг} / \text{м}^3$. Пакет образован 4 слоями с углами армирования $\varphi_i = +45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ$, толщина пластины $h = 0,001 \text{ м}$.

Изгибные жесткости пластины

$$[D]^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 1,9880 & 1,1213 & 0 \\ 1,1213 & 1,9880 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2427 \end{bmatrix} (\text{Нм}).$$

Введем безразмерные величины для ортотропной пластины

$$\tilde{D} = \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}} (h^3 a_0^2 \rho_m)^{-1} = 13,387;$$

$$\rho_0 / \rho_m = 8,471 * 10^{-4}, L = 300, B = 100$$

Диапазон скоростей набегающего потока $1,4 \leq M \leq 3,5$.

Определим частоты собственных колебаний пластины в зависимости от кинематических граничных условий на контуре. В соответствии с изложенной методикой находим начальное приближение частот колебаний $\bar{\omega} = \omega h / a_0$. После подстановки безразмерных частот $\bar{\omega} = \omega h / a_0$ в однородную систему уравнений (7) находим вектор собственных значений системы уравнений – начальное приближение. Выделяем комплексно-сопряженные собственные значения. Меняя исходные частоты коле-

баний $\bar{\omega}_{p+1} = \bar{\omega}_p + \Delta \bar{\omega}_p$, определяем момент, при котором действительная часть собственного значения $\text{Re}([\lambda])$ изменяет знак на противоположный. Сравнивая минимальные по модулю действительные компоненты комплексно-сопряженных значений из системы уравнений (7), находим момент возникновения флаттера прямоугольной ортотропной пластины в зависимости от граничных условий:

– для схемы Ш-Ш-Ш-Ш

$$[\lambda] = -8,26588\text{E} - 05 \pm 0,00308862;$$

– для схемы Ш-С-Ш-С

$$[\lambda] = -6,33569\text{E} - 05 \pm 0,001211908;$$

– для схемы 3-С-3-С

$$[\lambda] = -7,82389\text{E} - 05 \pm 0,00047338.$$

5.2. Косоугольная ортотропная пластина в сверхзвуковом потоке газа

Рассмотрим скошенную пластину из стеклопластика, которую обтекает поток газа. Пакет, как и ранее, образован 4 слоями с углами армирования $\varphi_i = +45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ$, толщина пластины $h = 0,001 \text{ м}$. Углы скоса пластины $\chi_1 = 15^\circ$, $\theta = 0^\circ$. Определим изгибные жесткости пластины в координатах $\xi\eta z$ (рисунок 1):

$$[D]^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 2,2059 & 1,0088 & 0 \\ 1,0088 & 1,8308 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1345 \end{bmatrix} (\text{Нм}).$$

Введем безразмерные величины для ортотропной пластины

$$\tilde{D} = \sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}} (h^3 a_0^2 \rho_m)^{-1} = 13,533;$$

$$\rho_0 / \rho_m = 8,471 * 10^{-4}, L = 300, B = 100.$$

Рассмотрим случай, когда скоростной поток обтекает внешнюю поверхность скошенной пластины под углом $\zeta = +15^\circ$. Тогда в осях $\xi O \eta$, связанных с геометрией пластины, вектор скорости потока будет направлен вдоль пластины с углами скоса кромок $\chi_1 = \chi_2 = 15^\circ$ и будет состоять из одной компоненты $\vec{V} = V_\xi$. Уравнение колебаний такой пластины в потоке газа примет вид

$$\begin{aligned} & D_{11}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) w_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} w_{,\eta\eta\eta\eta} - \\ & - N_\xi w_{,\xi\xi} - N_\eta w_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} w_{,\xi\eta} + \\ & + \frac{\chi p_0}{a_0} [w_{,t} + V_\xi w_{,\xi}] + \rho h w_{,tt} = 0 \end{aligned}$$

Найдем первые 12 частот колебаний и определим безразмерные частоты колебаний пластины как первое приближение. Однородная система уравнений исходной нестационарной задачи обтекания пластины потоком газа примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi^4 \tilde{D}}{LB^2} [C]^{-1} [\tilde{\Omega}] - \frac{\pi M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} [C]^{-1} [\tilde{F}_\xi] - \\ & - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_0}{\rho_m} \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 L/2 \right) [E] \end{aligned} \right\} [\lambda] = 0$$

Определим векторы собственных значений $[\lambda]$ системы уравнений как функции частот с заданным шагом до момента, когда минимальное действительное значение комплексно-сопряженных значений изменит знак на противоположный. Анализ результатов показал, что при обтекании косоугольной ортотропной пластины потоком газа, вектор скорости которого направлен вдоль оси пластины, в рассмотренных случаях закрепления кромок возникает флаттер внешней поверхности: в случае Ш-Ш-Ш-Ш при собственном значении $[\lambda] = -7,57565E - 05 \pm 0,003197731$; в случае Ш-С-Ш-С при значении $[\lambda] = -5,74873E - 05 \pm \pm 0,00125494$ и З-С-З-С $[\lambda] = -7,8239E - 05 \pm \pm 0,000473$. Частота колебаний пластины, при которой возникает флаттер, смещается в область высоких значений.

Рассмотрим случай, когда скоростной поток обтекает внешнюю поверхность скошенной пластины под углом $\zeta = 0^\circ$, т.е. перпендикулярно к поперечной кромке. Тогда в осях $\xi O \eta$, связанных с геометрией пластины, вектор скорости потока будет состоять из двух компонентов $\vec{V} = [V_\xi \sec(\chi); -V_\eta \tan(\chi)]$. Уравнение колебаний скошенной пластины в потоке газа примет вид

$$\begin{aligned} & D_{11}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2(D_{12}^{\xi\eta} + 2D_{33}^{\xi\eta}) w_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} w_{,\eta\eta\eta\eta} - \\ & - N_\xi w_{,\xi\xi} - N_\eta w_{,\eta\eta} - 2N_{\xi\eta} w_{,\xi\eta} + \frac{\chi p_0}{a_0} \\ & [w_{,\xi} + V_\xi \sec(\chi - \zeta) w_{,\xi} - V_\eta \tan(\chi - \zeta) w_{,\eta}] + \rho h w_{,\eta} = 0 \end{aligned}$$

Однородная система уравнений будет иметь нетривиальное решение, если определитель системы будет равен нулю. Определим векторы собственных значений $[\lambda]$ однородной системы уравнений в момент, при котором минимальное действительное значение комплексно-сопряженных значений меняет знак на противо-

положный. Вычисления показали, что для схем Ш-Ш-Ш-Ш и Ш-С-Ш-С в выбранных диапазонах скоростей набегающего потока отсутствует момент смены знака действительной части комплексно-сопряженных значений, т.е. в пластине не возникает «зафлаттерного» неустойчивого состояния. В случае, когда продольные кромки пластины зашпелены, а боковые свободны от закрепления, возникает неустойчивое состояние. Критическая скорость флаттера соответствует комплексно-сопряженному собственному значению $[\lambda] = -7,823889E - 05 \pm 0,00047338$.

Выводы

Проведено исследование, показавшее возникновение неустойчивости в диапазоне средних сверхзвуковых скоростей обтекания пластин конечного размера с формами прямоугольника и параллелограмма. Было показано, что неустойчивость является связанной. Изучено влияние геометрии пластины с разными углами скоса продольных кромок, кинематических граничных условий, направления действия набегающего потока по отношению к поперечным кромкам на критические скорости флаттера изотропной и ортотропной пластин. Система уравнений находится с помощью метода Бубнова-Галеркина для нестационарной задачи обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа. В качестве аппроксимирующих функций выбираются балочные функции Крылова, позволяющие точно удовлетворить кинематические граничные условия. В качестве критерия возникновения флаттера принято исследование знака действительной части комплексно-сопряженных собственных значений, определяемых из условия нетривиального решения однородной системы уравнений. При положительных действительной и мнимой частей комплексно-сопряженных собственных значений состояние пластины становится неустойчивым с последующим нарастанием незатухающих колебаний. Определены частоты колебаний в среднем диапазоне сверхзвуковых скоростей, при которых наступают незатухающие колебания с «зафлаттерной» бегущей волной.

Список литературы

- [1] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости // М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
- [2] Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Известия АН СССР. Прикладная математика и механика. 1056. Т. 20. № 6. С. 733–755.
- [3] Смирнов А. И. Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов // М.: Машиностроение, 1980. 231 с.
- [4] Веденеев В. В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // Известия РАН. Механика жидкости и газа, № 2. 2009. С. 168–177.
- [5] Веденеев В. В. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2010. № 4, с. 163–174.

- [6] Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1978. Т. 11. С. 67–122.
- [7] Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
- [8] Элкинс Раш, Ванг Ганг. Анализ аэроупругости и динамики композитных крыльев с трещинами с использованием спектрального метода конечных элементов // doi:10.2514/6.2014-0677
- [9] Характеристики флаттера гибкой композитной пластины из 3D-ткани со встроенным сплавом с памятью формы в дозвуковом потоке. Март 2022 г. // doi: 10.1177/15280837221077043
- [10] Нелинейная аэроупругость пониженного порядка стреловидных композитных крыльев с использованием сжимаемой индикаторной нестационарной аэродинамики // doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2019.102812
- [11] Двухуровневая последовательная оптимизация для комплексного проектирования композитных конструкций с неопределенной прочностью/аэроупругостью // Структурная и междисциплинарная оптимизация (2021) 64: 2377–2392 <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02989-x>
- [12] Влияние несбалансированных параметров ламинирования на статическую аэроупругость крыла с высоким удлинением // Международный журнал аэрокосмической техники, том 2021, номер статьи 3949078, 19 страниц <https://doi.org/10.1155/2021/3949078>
- [13] Слисонгсом С., Кумар С., Бурерат С. Многоцелевая оптимизация частичной топологии композитного крыла самолета, основанная на надежности // Symmetry, 2023, 15, 305. <https://doi.org/10.3390/sym15020305>
- [14] Прогнозирование повреждений изогнутой композитной однослойной панели повышенной жесткости при статическом сжатии // Июль 2023 г. AIAA JournalFollow journal // doi: 10.2514/1.J062656
- [15] Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
- [16] Эйсли Дж. Г., Люссен Г. Колебание тонких пластин под действием комбинированных сдвигающих и нормальных краевых сил // Журнал AIAA, 1963. 1 (3), 620–626 // doi:10.2514/3.54847
- [17] Кеттер Д. Дж. Колебание плоских прямоугольных ортотропных панелей // Журнал AIAA, 1967. 5(1), 116–124 // doi:10.2514/3.3917
- [18] Азиков Н. С., Зинин А. В., Гайдаржи Ю. В., Сайфуллин И. Ш. Прочность при закритическом деформировании косоугольных композиционных панелей // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2021. № 5. С. 62–71.
- [19] Азиков Н. С., Зинин А. В. Модель разрушения анизотропной композитной конструкции // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2018. Том 47. № 5. С. 423–429.
- [20] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [21] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.
- [22] Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.

INVESTIGATION OF THE OCCURRENCE OF FLUTTER IN ISOTROPIC AND ORTHOTROPIC PLATES WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS AND SKEW ANGLES

N. S. Azikov¹, A. V. Zinin², Yu. V. Gaidarzh³

¹*Mechanical Engineering Research Institute
of the Russian Academy of Sciences
Moscow, The Russian Federation*

²*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Moscow, The Russian Federation*

³*Tops Business Integrator LLC
Moscow, The Russian Federation*

The purpose of the research: to determine the possibility of a panel flutter in the range of average supersonic speeds in a multilayer composite plate with the shape of a rectangle or parallelogram and taking into account the direction of action of the velocity flow relative to its

longitudinal edges. The possibility of panel flutter occurrence in the range of average supersonic speeds ($1.4 < M < 2$) has been investigated. The influence of boundary conditions and bevel angles of isotropic and orthotropic plates on the critical flutter velocity is studied. The basic relations (physical and geometric) for a multilayer composite plate with symmetrical laying of layers in thickness in an oblique coordinate system associated with the contour geometry are recorded. Since the geometric boundary conditions on each edge of the plate may be different, well-known "beam" functions are used to approximate the shape of the deflection for each the coordinate of the oblique coordinate system. The initial problem of the supersonic gas flow around the plate is considered to be non-stationary. But since further there is a need for several natural oscillation frequencies, the latter are found from the condition of the minimum of the total potential energy of the system. The solution of the non-stationary problem is based on several natural oscillation frequencies at fixed values of the gas flow velocity flowing around the plate. A homogeneous system of equations is obtained using the Bubnov-Galerkin method for deflection, represented as a series composed of proper shapes. The latter are selected from the boundary conditions. The critical parameter of the system is the condition that the real part of the complex conjugate eigenvalues is equal to zero. The occurrence of flutter is associated with a change in the sign of the real part of the eigenvalues, which are found from the condition of non-triviality of solving a homogeneous system of equations. Critical flutter velocities and oscillation frequencies are found for the selected geometric dimensions of the plates and the mechanical characteristics of the material. The analysis of the results was carried out. It is noted that in the initial formulation of the problem, a panel flutter occurs in the middle range of supersonic speeds.

Keywords: skew plates, boundary conditions, natural oscillation frequencies, complex conjugate eigenvalues, plate flutter.

References

- [1] Bolotin V. V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Fizmatgiz, 1961. 339 p.
- [2] Ilyushin A. A. The law of plane sections in the aerodynamics of high supersonic speeds // Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Applied mathematics and mechanics. 1056. Vol. 20, No. 6, pp.733–755.
- [3] Smirnov A. I. Aeroelastic stability of aircraft. M.: Mashinostroenie, 1980. 231 p.
- [4] Vedenev V. V. Numerical study of supersonic plate flutter using precise aerodynamic theory // Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas, No. 2, 2009, pp.168–177.
- [5] Vedenev V. V. Investigation of the single-mode flutter of a rectangular plate in the case of variable self-mode amplification along the plate // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas. 2010. No.4, pp. 163–174.
- [6] Novichok Yu. N. Flutter of plates and shells // Results of science and technology. Ser. Mechanics of a deformable solid. 1978, vol. 11, pp. 67–122.
- [7] Algazin S. D., Kiiko I. A. Flutter of plates and shells. M.: Nauka, 2006. 247 p.
- [8] Elkins Rush, Wang Gang. Aeroelasticity and Dynamic Analysis of Cracked Composite Wings Using Spectral Finite Element Method // doi:10.2514/6.2014-0677
- [9] Flutter performance of shape memory alloy-embedded 3D woven flexible composite plate under subsonic flow // March 2022 doi: 10.1177/15280837221077043
- [10] Reduced order nonlinear aeroelasticity of swept composite wings using compressible indicial unsteady aerodynamics // doi:10.1016/j.jfluidstructs.2019.102812
- [11] Double-level sequential optimization for strength/aeroelasticity comprehensive design of uncertain composite structures // Structural and Multidisciplinary Optimization (2021) 64:2377–2392 <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02989-x>
- [12] Effects of Unbalanced Lamination Parameters on the Static Aeroelasticity of a High Aspect Ratio Wing // International Journal of Aerospace Engineering Volume 2021, Article ID 3949078, 19 pages <https://doi.org/10.1155/2021/3949078>
- [13] Slesongsom S., Kumar S., Bureerat S. Multi-Objective Reliability-Based Partial Topology Optimization of a Composite Aircraft Wing //Symmetry 2023, 15, 305. <https://doi.org/10.3390/sym15020305>
- [14] Damage Prediction of Buckled Composite Single Stiffened Panel Subject to Static Compression // July 2023AIAA JournalFollow journal – doi: 10.2514/1.J062656
- [15] Vasiliev V. V. Mechanics of structures made of composite materials. // M.: Mashinostroenie, 1988. 272 p.
- [16] Eisley J. G., Luessen G. (1963). Flutter of Thin Plates under Combined Shear and Normal Edge Forces. AIAA Journal, 1(3), 620–626. doi:10.2514/3.54847

- [17] Ketter D.J. (1967). Flutter of flat rectangular orthotropic panels. AIAA Journal, 5(1), 116–124. doi:10.2514/3.3917
- [18] Azikov N.S., Zinin A.V., Gaidarzhi Yu.V., Saifullin I. Sh. Strength under supercritical deformation of oblique composite panels // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2021. No. 5, pp. 62–71.
- [19] Azikov N.S., Zinin A.V. A Destruction Model for an Anisogrid Composite Structure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2018, Vol 47, No. 5, pp. 423–429.
- [20] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matrices and calculations. M.: Nauka, 1984.– 320 p.
- [21] Korn G., Korn T. Handbook of Mathematics. M.: Nauka, 1968. 720 p.
- [22] Madelung E. Mathematical apparatus of physics. M.: Nauka, 1968. 620 p.

Сведения об авторах

Азиков Николай Сергеевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института машиноведения им. А. А. Благонравова РАН. Окончил Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе в 1978 году по специальности «прочность летательных аппаратов». Область научных интересов: устойчивость и прочность тонкостенных многослойных композитных конструкций, исследование поведения панелей после потери устойчивости при закритическом деформировании, частотные характеристики плоских и пологих панелей, исследование факторов, влияющих на возникновение флаттера при обтекании пластин в сверхзвуковом потоке газа.

Зинин Александр Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин Московского авиационного института (национальный исследовательский университет). Окончил Московский авиационно-технологический институт имени К. Э. Циолковского в 1978 году по специальности «самолетостроение», квалификация – инженер-механик. Область научных интересов: прочность, устойчивость и надежность элементов летательных аппаратов; усталость и механика разрушения композиционных материалов; методы оценки несущей способности и долговечности композитных элементов авиакосмических конструкций. Индекс Хирша –10.

Гайдаржи Юрий Васильевич – кандидат технических наук, ведущий инженер ООО Топс Бизнес Интегратор. Окончил Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского в 2009 году по специальности «прикладная механика». Область научных интересов: устойчивость и прочность элементов авиационных конструкций из изотропных и композитных материалов, численные инженерные расчетные методы на основе МКЭ, МКО.